جزوه آمادگی آزمون کارشناسی ارشد عمران

درس مقاومت مصالح

مدرس: **مهندس شمالی** "عضو هیئت علمی دانشگاه بوعلی سینای همدان"

"این جزوه از تدریس در کلاس های کنکور ارشد عمران در همدان تهیه شده است"

(I)

86,9,22

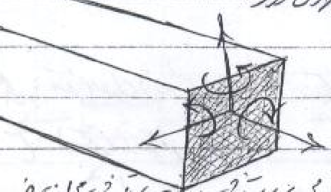
مقاومت مصالح :

ج (۱)

مقاومت مصالح تحت تاثیر نیروی که بر سطح عرضی وارد می‌شود که این نیرو و تاثیر آن بر ... مواد ... تغییر شکل

... در سازه ایجاد می‌کند ... که در کدام ... که جهت محوری دارد

... تحلیل ... در شکل ... داشتیم .



سرفصلها : axial loading (بارگذاری محوری سازه)

(1) ۱- تنش : محاسبه تنش در سیستم‌های معین تحت بارگذاری محوری با تنش نرمال ، تنش مجاز ، ضریب اطمینان

۲- کرنش (strain) : برای ... تغییر شکل ... نیاز داریم

= رابطه تنش و کرنش

= محاسبه تغییر شکل سیستم‌های معین تحت بارگذاری محوری

(5) ۳- تحلیل سیستم‌های نامعین تحت بارگذاری محوری در ناحیه الاستیک ← رابطه هوک (6.8.5) (E=5E)

(1) ۴- معادلات تعمیم یافته هوک (ضریب پواسون) ، کرنش سطحی ، کرنش حجمی

(4-4) ۵- پیچش (مقاطع دایره‌ای + مقاطع جدار نازک بسته + مقاطع جدار نازک)

(2-3) ۶- خمش : (مقاطعی که حداقل یک محور تقارن داشته باشند) و (مقاطع مرکب) در ناحیه الاستیک

۷- برش :

۸- تنش‌های ترکیب (یعنی ... ترکیب برش و ... خمش : ترکیب تمام ...)

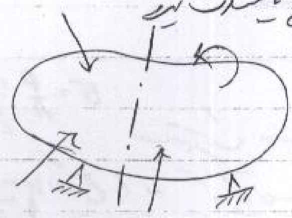
۹- دایره مور : (انتقال تنش) با داشتن تنش‌ها ... که جهت‌های ... داریم

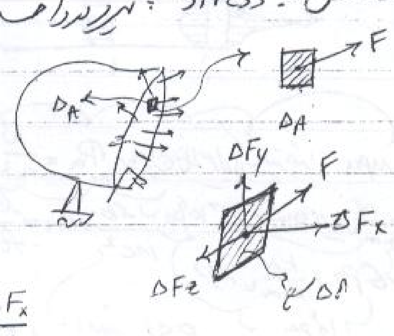
... تنش‌ها را داریم .

۱۰- ستون (...) ... آزادی .

فصل اول :

= تنش : stress : نیرو در واحد سطح یا شدت نیرو





ΔA ← این تکه ... است

ΔF_x

$$\text{تنش} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

در ... توزیع نیرو ... ثابت

... ...

لذا تعریف دقیق تنش به شرح ذیل است :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$ مثلاً : تعریف دقیق تنش.

σ : تنش عمودی (تنش نرمال) : Normal Stress

تنش برشی : τ (تنش‌های τ_{zy})

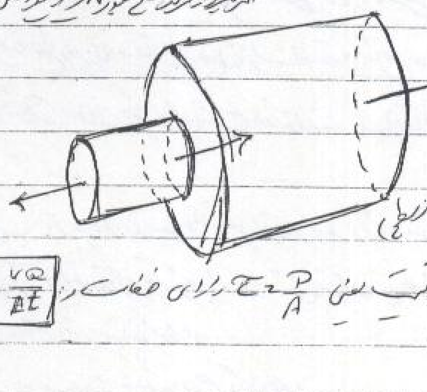
$$\tau_y = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$

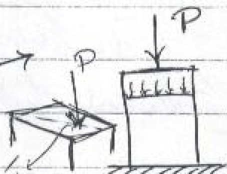
$$\tau_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

انواع تنش از نقطه نظر نحوه تأثیر :
۱- تنش نرمال Normal Stress
۲- تنش برشی Shear Stress

- آنالیز تنش در سیستم‌هایی یعنی تحت بارگذاری محوری :

اثر نیرو از سطح مقطع عمود بر اثر نیروی اصلی وارد.





A P

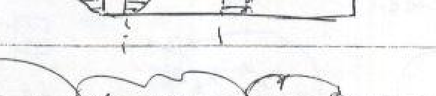
تنش متوسط $\sigma = \frac{P}{A}$

با فرض استقرار تمرکز تنش
یعنی با فرض که توزیع تنش یکنواخت است ××

- از این شکل می‌رسیم اثر برشی اثر نیروی اصلی نیست یعنی $\tau = \frac{P}{A}$ برای ... $\boxed{\tau = \frac{VQ}{It}}$

(اصل تمرکز تنش) ← سن ونانت

هر چه از مرکز دور کنیم توزیع تنش یکنواخت‌تر است.



- واحد تنش :

$\sigma = \frac{P}{A}$ واحد نیرو / واحد سطح

سیستم متریک ← $Pa = \frac{N}{m^2}$ در مواردی که ... MPa

$MPa = \frac{N}{mm^2}$ استفاده می‌شود $= 10^6 Pa$

$GPa = \frac{kN}{mm^2}$ = $10^9 pa$

انگلیسی ← $\frac{lb}{in^2} \times 144 = \frac{lb}{ft^2}$

ایرانی

$\boxed{70 \frac{kg}{cm^2} = ksi}$ در

psi ... $ksi = 1000 psi$ مثال: $E_{st} = 200\ GPa = 30000\ ksi$

(Pounds Per Square inch)

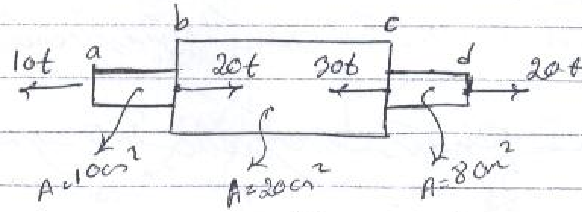
III

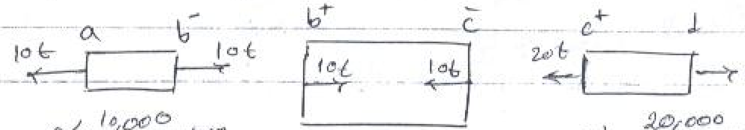
سیستم ایرانی : kgf ، cm^2 ؛ $(\frac{kg}{cm^2})$:

= آنالیز تنش :

اکثر تنش مثبت و منفی)

تعیین مقطع تنش = max





$\sigma_{ab} = \frac{10,000}{10} = 1000 \; kg/cm^2$

$\sigma_{bc} = \frac{-10,000}{20} = -500 \; kg/cm^2$

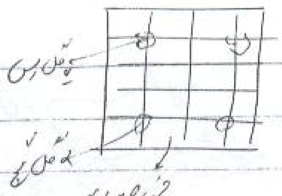
$\ominus$ فشار ← منفی

$\sigma_{cd} = \frac{20,000}{8} = 2500 \; kg/cm^2$

III

ماهوری: نازک می‌نوازیم ← با درشتگاه پرت می‌شود. (ایپا)

ویژگی: هم شکل ماهوری است اما درشت‌تر است و با پنجه گیره [illegible] زیر تر است.



- آب بشار: (مسلمان [illegible] - [illegible] و [illegible] شده از [illegible])

- [illegible] آب بشار است [illegible] الوان [illegible] است

اما با سیم آب [illegible] می‌شود [illegible] تا [illegible] شود.

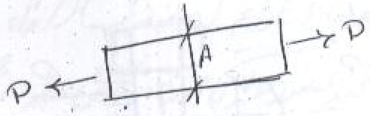
- چکش: [illegible] است [illegible] شده می‌آید.

[illegible] (در حاشیه)

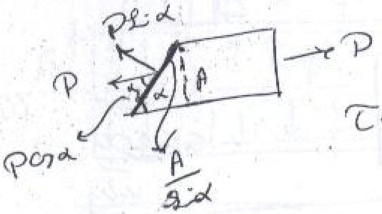
۲۵

(I)

$\tau_{max} = ?$ (مقاومت مصالح)



$$\sigma = \frac{P\sin\alpha}{\frac{A}{\sin\alpha}} = \frac{P}{A}\cdot\sin^2\alpha$$

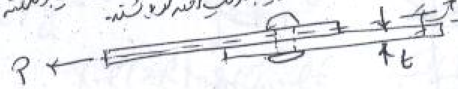


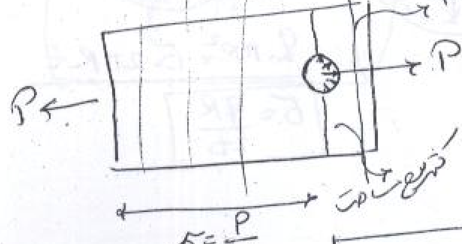
$$\tau = \frac{P\cos\alpha}{\frac{A}{\sin\alpha}} = \frac{P}{A}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{P}{A}\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{P}{2A} \quad \sin 2\alpha = 1 \quad 2\alpha = \pi/2 \rightarrow \alpha = \pi/4$$

$$\sigma_{max} \longrightarrow \sin\alpha = 1 \quad \alpha = \pi/2 \rightarrow \sigma_{max} = \frac{P}{A}$$

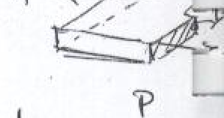
مثال: دو صفحه نازک توسط یک پیچ به هم متصل‌اند. از اصطکاک بین دو صفحه صرف‌نظر می‌شود. [illegible] اختلاف (t) تقریباً [illegible] گرفته شده. [illegible] P [illegible] ایجاد کننده خمش [illegible] تنش [illegible] تنش در پیچ و تنش برشی. (همیشه این سه تنش باید [illegible] از لحاظ کشیده سوراخ [illegible] بزرگتر [illegible] $\sigma = \frac{P}{A}$ است.)



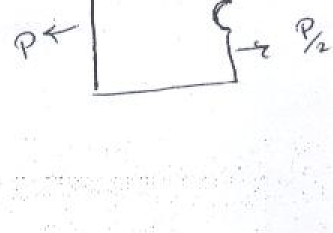


$P = 0$ ** چون [illegible] P

$\sigma = \frac{P}{A}$ کششی / برشی



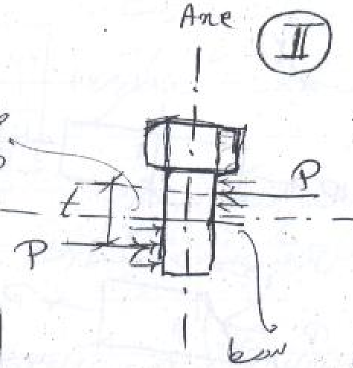
$$\sigma = \frac{P}{bt}$$



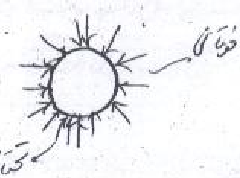
$$\sigma_{max}\Big|_{at\ plate} = \frac{P}{(b-d)t}$$

II

تنش برشی :



چون در اینجا تنش برشی سطح ما
که خارج کرده داریم پس تنش را
میانگین نیروی که پایین از بالا
فشار می‌کشند



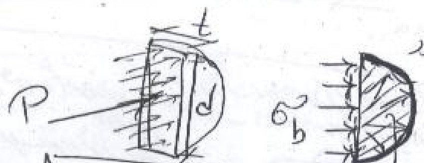
$$\boxed{\tau_{max} = \frac{P}{\frac{\pi}{4} d^2}}$$

این رابطه
خطا دارد

تنش اتصالی یا تماسی یا له‌شدگی : در تنشی که در محل تماس دو جسم حادث شود.

$\sigma_b = ?$

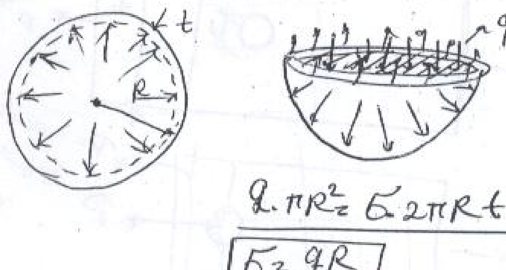
Bearing Stress



$$\boxed{\sigma_b = \frac{P}{d\,t}}$$

پاسکال : اگر نیرو به یک سیال وارد
شود عینا آن نیرو به همه جا وارد
می‌شود.

کره جدار نازک به ضخامت t و شعاع R (سیال تار) تنش داخل کره چقدر است.



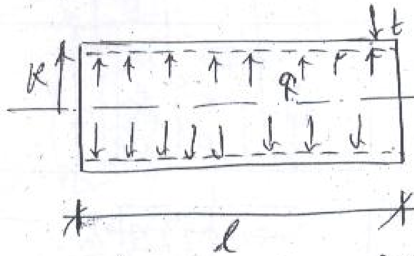
نه با پاسکال استفاده می‌کنیم

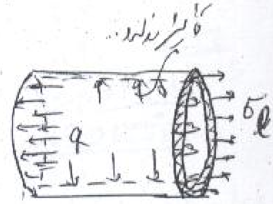
$$q \cdot \pi R^2 = \sigma \cdot 2\pi R t$$

$$\boxed{\sigma = \frac{qR}{2t}}$$

III

یک کپسول استوانه‌ای به شعاع میانی تار R و ضخامت t داریم. اگر این مخزن طول l را دارد
تحت فشار درونی گاز q در مقطع عمودی یک عنصر همراستای محور عنصر تنش چقدر است؟



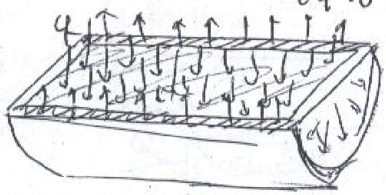


$\sum F_x = 0$

$q \cdot \pi R^2 = \sigma_l \, 2\pi R t$

$\boxed{\sigma_l = \frac{qR}{2t}}$ تنش محوری

σ_t : تنش مماسی

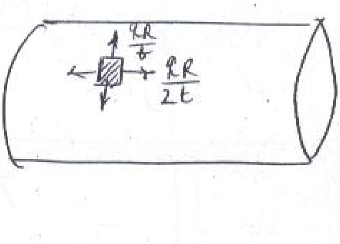


$\sum F_y = 0$

$q \cdot l(2R) = 2\sigma_t \cdot l t$

$\boxed{\sigma_t = \frac{q \cdot R}{t}}$

زمانی که مخزن استوانه‌ای تحت فشار منفجر شود در راستای طول ترک برمی‌دارد و تنش‌های مماسی در طول استوانه‌ها یکنواخت است و لذا همیشه تنش در بالا و پایین استوانه‌ها را در نظر نمی‌گیریم

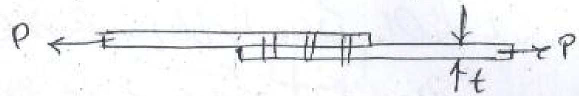


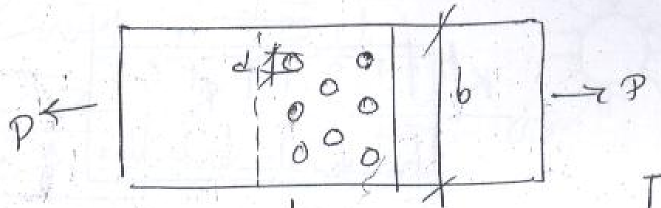
IV

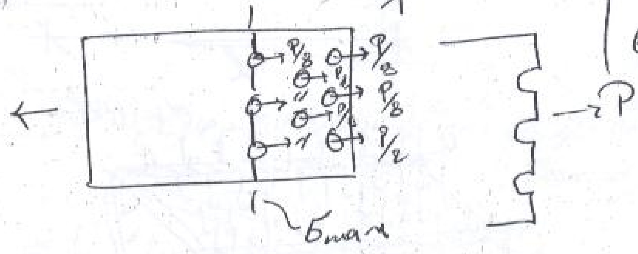
σ_{max} at plate = ?

$\sigma_b = ?$

$\sigma_{a-a} = ?$



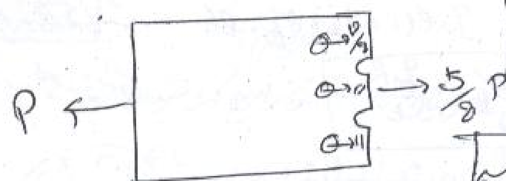




$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{P}{(b-3d)t}}$$

نیروی $P/8$ کاهش داده شده از P باقیمانده P از بین می‌رود

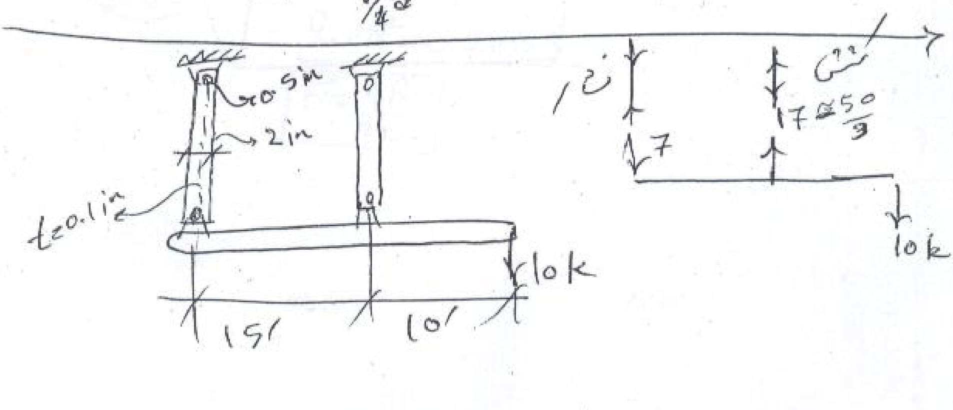
σ_{a-a}



$$\boxed{\sigma_{a-a} = \frac{\frac{5}{8}P}{(b-2d)t}}$$

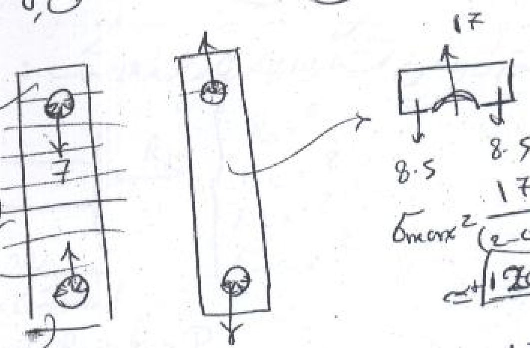
$$\boxed{\sigma_b = \frac{P/8}{dt}}$$ لهیدگی

تنش برشی $\tau_{bolt} = \frac{P/8}{\frac{\pi}{4}d^2}$



V

فشاری



در اینجا P صفر است

(کشش)

$$\sigma_{max} = \frac{17}{(2-0.5)\times 0.1} = \frac{17}{0.15}$$

تقریبا $\boxed{120\ ksi}$

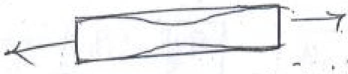
نیروی کم در اینجا چون نیروی کم نیرو است نیروی کم در سطح زیادی می‌افتد.

$$\sigma_{max} = \frac{-7}{2\times 0.1} = -35\ ksi$$

$$(\sigma_{b\,max}) = \frac{17}{0.5\times 0.1} = 340\ ksi$$

تنش نهایی: بیشترین تنشی که یک ماده تحمل می‌کند تا گسیخته شود. (تنش شکست)

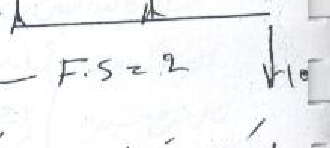
Ultimate stress : σ_u



σ_u را به یک عدد بزرگتر از یک تقسیم می‌کنیم تا اطمینان کرد ← σ_{all} بدست می‌آید

چون نمی‌توان به σ_u Factor of safty

$$\frac{\sigma_u}{F.S > 1} = \sigma_{all} \quad (\text{allowable stress})$$



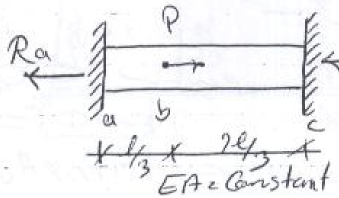
F.S = 2 ← یعنی تا 2 برابر این بار را می‌تواند تحمل کند.

درست است هر چه F.S بالاتر که ضریب اطمینان بالا رفته اما یعنی حالت این که F.S را داشته باشیم یعنی هزینه بالا می‌رود و صرفه جویی نیست.

86,10,1 (I) «مقاومت مصالح»

*** – تحلیل سیستم‌های نامعین تحت بارگذاری محوری در حوزهٔ الاستیک :

20-30% سؤالات



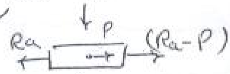
$R_a = ?$
$R_c = ?$
$\Delta_b = ?$
$\sigma_{max} = ?$

EA = Constant

تعادل: $\sum F_x = 0 \Longrightarrow R_a + R_c = P$

سازگاری (انطباق تغییر شکل‌ها) اجزا یک سیستم) Compatibility : ⟵ همان مقداری که ab کشیده می‌شود bc عاماً فشرده می‌شود ⟵ $\Delta_{ac} = 0$

$\Delta_{ac} = \Delta_{ab} + \Delta_{bc} = 0 \Longrightarrow$

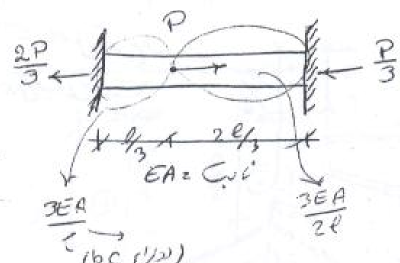


$$\frac{R_a \cdot \frac{l}{3}}{EA} + \frac{(R_a - P)\cdot\frac{2l}{3}}{EA} = 0$$

$$\Longrightarrow 3R_a - 2P = 0 \qquad \boxed{R_a = \frac{2}{3}P} \qquad \boxed{R_c = \frac{1}{3}P}$$

– انواع مسائل نامعین :
الف : مسائلی که با استفاده از اصل توزیع نیرو در نسبت سختی حل می‌شوند (بعضاً می‌توان اصل جمع آثار قوی‌ها نیز با این روش تلفیق شود) در اینجا سیستم ضد نیروها را نیز تحلیل کرد
ب : 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 نمی‌شوند

مثال بالا را مجدداً از این روش حل می‌کنیم



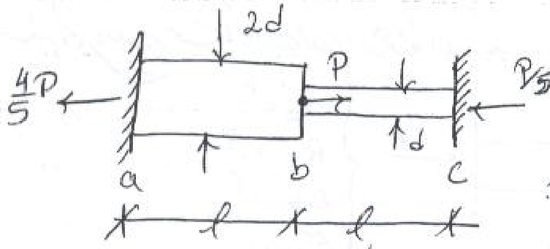
$\frac{EA}{l}$

شرایط استفاده از اصل توزیع نیرو در نسبت سختی :
۱- مسئله نامعین باشد.
۲- حضور مصالح در حوزهٔ الاستیک
۳- هر نیرو وارد شده در اجزای سازه جابجایی یکسانی ایجاد کند.

$$\sigma_{max} = \frac{2}{3}\frac{P}{A}$$

$$\Delta_b = \Delta_{ab} = \Delta_{bc} = \frac{2Pl}{9EA}$$

II



E = Constant

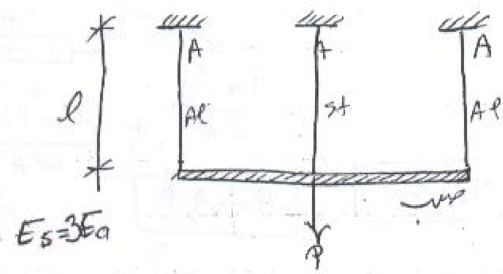
σ_{max} کجاست

تنش در ab و bc یکسان است. نسبت نیرو به سطح ثابت است

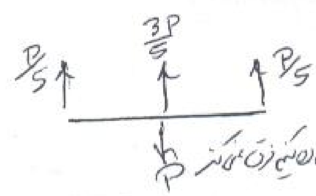
$A_{(ab)}$ چهار برابر (bc) است

یعنی نیرو هم چهار برابر است تا تنش به خاطر A را در تنش حذف کند

$$\Delta_p = \frac{\frac{P}{5}\cdot l}{E\cdot\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{4Pl}{5\pi E d^2}$$



$E_s = 3E_a$



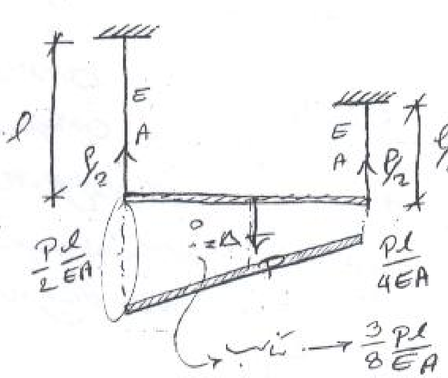
سختی سه برابر

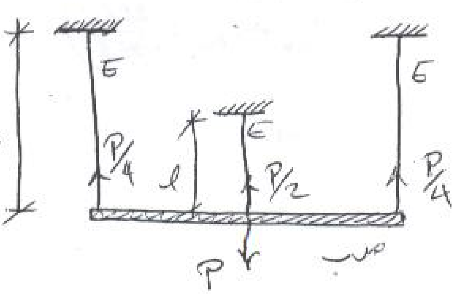
از نیرو ۳/۵ ستون وسطی تحمل می‌کند

$$\Delta_{Rigid\cdot Plate} = \frac{\frac{P}{5}\cdot l}{EA} = \frac{Pl}{5EA}$$

$\Delta_p = ?$

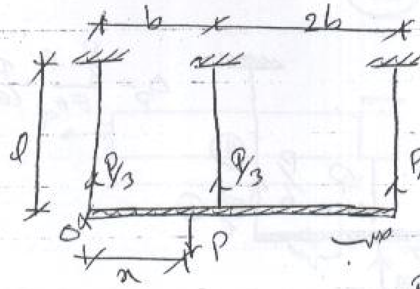
سیستم معین است: اصل توزیع نیرو به نسبت سختی برقرار نیست.





$$\begin{cases} \Delta_{\text{صفحه صلب}} = \frac{\frac{P}{2}\cdot l}{EA} = \frac{Pl}{2EA} \\ \sigma_{max} = \frac{P/2}{A} = \frac{P}{2A} \end{cases}$$

III



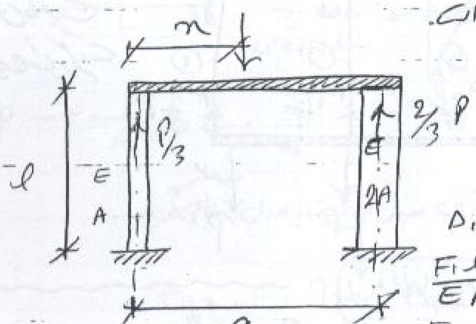
سه میله هم جنس با طول و سطح مقطع یکسان مطابق
شکل صفحه صلب را نگه داشته اند. P
کجا اثر کند تا صفحه صلب افقی باقی
بماند؟

حل: $\sum M_O = 0$

$$-\frac{P}{3}\times b+\frac{P}{3}\times 3b = P\times x \qquad x = \frac{4}{3}b$$

$$\Delta_{صلب} = \frac{Pl}{3EA} \qquad \sigma_{max} = \frac{P}{3A}$$

افقی است.



نکته: هنگامی که سیستم نامعین باشد اجزای
سیستم تغییر شکل ها باید متناسب
(سازگاری)
از اصل ترکیب نیروها کمک گرفت.

$$\Delta_1 = \Delta_2$$

$$\frac{F_1 l}{EA} = \frac{F_2 l}{2EA}$$

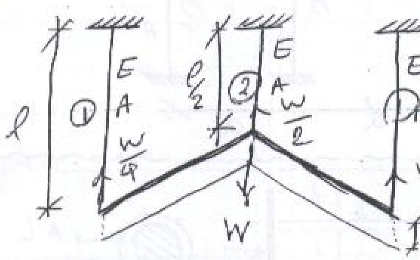
$$F_2 = 2F_1$$

$$F_1 + F_2 = P$$

$$P x = \frac{2}{3}P \cdot a$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}a}$$

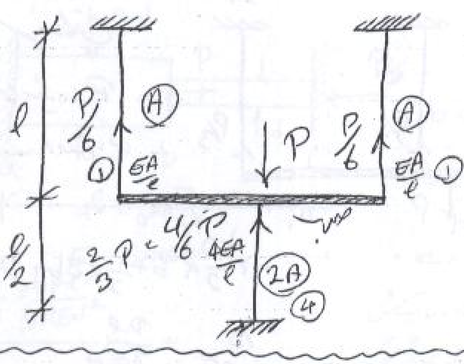
Δ کجاست.

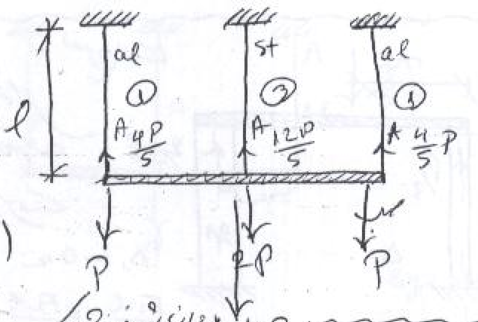


$$\boxed{\Delta = \frac{Wl}{4EA}}$$

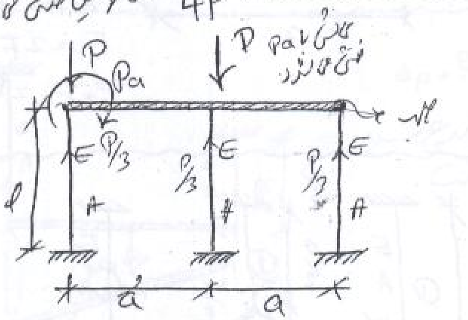
IV

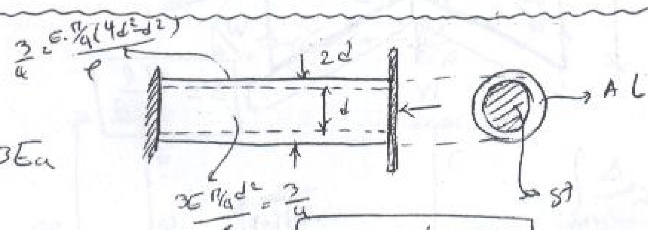
$$\Delta_P = \frac{\frac{P}{6}\cdot l}{EA} = \frac{Pl}{6EA}$$





$(E_s = 3E_a)$

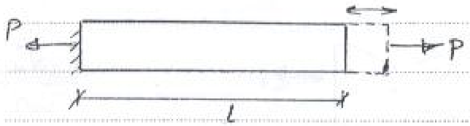




$E_s = 3E_a$

$$\boxed{P_{st} = \%50\,P}$$

تغییر طول واحد طول



$l \quad \Delta$

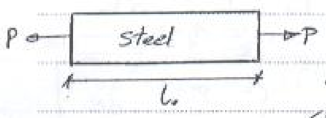
$1 \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{l}$ کرنش

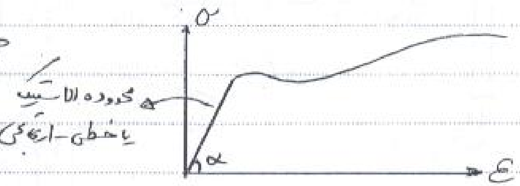
* چون کوچک بود با ε نمایش می دهیم.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

منحنی تنش و کرنش:

در آزمایش تنش استاندارد میله را تحت کشش قرار می دهند و تحت سطح مقطع اولیه چون در اثر کشش مقطع تغییر می کند.





$tg\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

$P \rightarrow \sigma = \frac{P}{A_0} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

بین تنش و کرنش رابطه خطی وجود دارد.

α معرف سختی ماده است که برابر E است که به آن مدول الاستیسیته یا مدول ارتجاعی گویند.

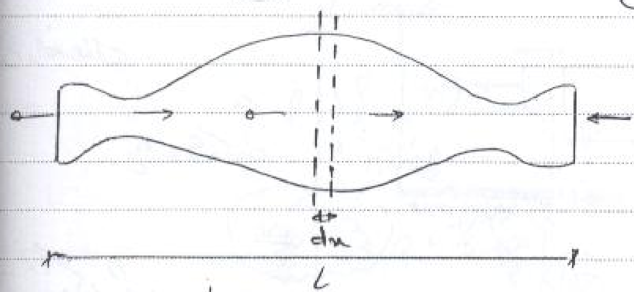
E برای هر ماده عدد ثابتی است.

$tg\alpha = E \qquad \boxed{\sigma = tg\alpha \cdot \varepsilon = E \cdot \varepsilon}$ رابطه هوک

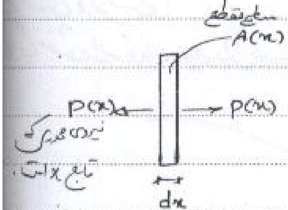
واحدها یکی است. — واحد ندارد

* هر چه E ماده زیادتر شود یعنی تنش زیاد، کرنش کم می شود. $\uparrow E = \frac{\sigma \uparrow}{\varepsilon \downarrow}$

مطالعه تغییر شکل سیستم معین در حوزه الاستیک تحت بارگذاری محوری :



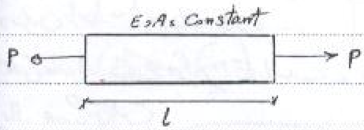
مقطع متغیر



$$\underbrace{d\Delta}_{\text{تغییر طول}} = \underbrace{\varepsilon}_{\text{تغییر طول واحد}} \underbrace{dx}_{\text{طول اولیه}} = \frac{\sigma}{E}\,dx = \frac{P(x)}{E\,A(x)}\,dx$$

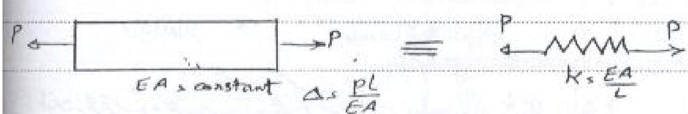
$$\rightarrow \boxed{\Delta = \int_0^l \frac{P(x)}{E\,A(x)}\,dx}$$

رابطه کلی مطالعه Δ یک میله



$$\Delta = \frac{PL}{EA}$$

یک میله با صلبیت محوری EA و نیروی P هم ارز با یک فنر



$$\Delta = \frac{PL}{EA} \qquad \Delta = \frac{P}{\underbrace{\frac{EA}{L}}_{k}} \rightarrow \Delta = \frac{P}{K}$$

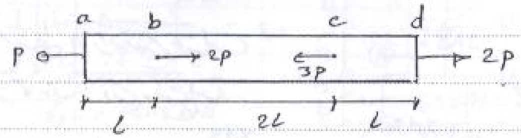
حال سیستمی که متشکل از اجزای مختلف باشد تغییر طول به شکل زیر است :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i\,l_i}{E_i\,A_i}$$

Subject 13

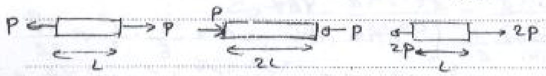
Date

تغییر طول میله زیر چقدر است؟

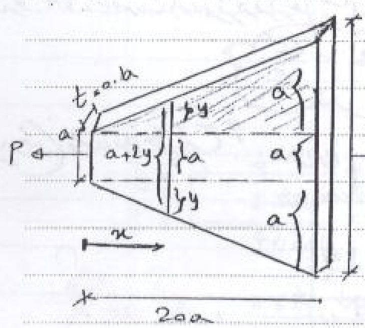


E, A = Constant

$$\Delta = \frac{Pl}{EA} - \frac{P(2l)}{EA} + \frac{2Pl}{EA} = \frac{Pl}{EA}$$



* تنش‌هایی که لازم ندارند در طرح نیست.



$$\frac{y}{a} = \frac{x}{20a} \rightarrow y = \frac{x}{20}$$

$$a + 2y = a + \frac{x}{10}$$

$$A(x) = (a + 0.1x)(0.1a) = 0.1a^2 + 0.01ax$$

$$\Delta = \int \frac{P(x)}{EA(x)}\,dx = \frac{P}{0.01aE}\int_0^{20a} \frac{1 \times 0.01}{0.1a^2 + 0.01ax}\,dx$$

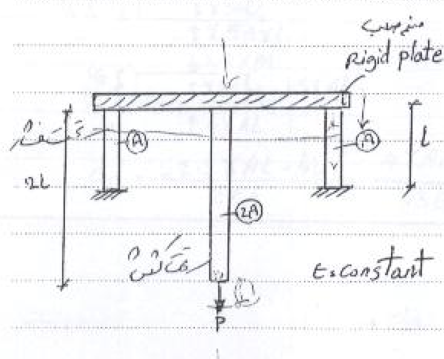
?

$$\Delta = \frac{P}{0.01aE}\left[\ln(0.1a^2 + 0.01ax)\right]_0^{20a} = \frac{100P}{Ea}\ln(3)$$

تنش ماکسیمم جایی است که سطح مقطع کمتر است.

تغییر مکان نقطه اثر بار متمرکز P ؟ (میله‌ها هم جنس اند)

در اثر کشیدگی P میله وسط، $P/2$ به میله سمت چپ و $P/2$ به میله سمت راست وارد شود و صفحه صلب را به پایین می‌آورد و علاوه بر آن خود میله به طول 2L نیز تغییر طول خواهد داد.

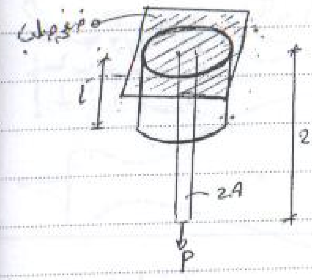


در اثر پائین آمدن صفحه صلب

$$\Delta p = \frac{P(2L)}{E(2A)} + \frac{\frac{P}{2}L}{EA} = \frac{1.5PL}{EA}$$

اگر صفحه بالا صلب نباشد میله بالا خمش برمی‌دارد و $\frac{PL^3}{48EA}$ نیز اضافه می‌گردد.

مسئله‌ای از کتاب بیر جانسون

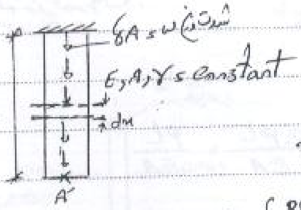


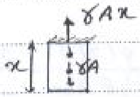
$$\Delta_P = \underbrace{\frac{P(2L)}{E(2A)}}_{\text{کشیدگی میله}} + \underbrace{\frac{P(L)}{EA}}_{\text{فشردگی استوانه}}$$

چرا فشردگی استوانه؟

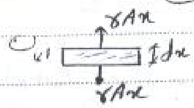
تغییر مکان نقطه A بر اثر وزن چقدر است؟

هر وقت اثر کل وزن مطرح است.





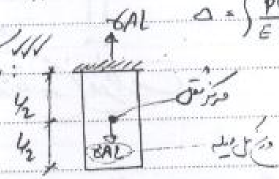
یا



$$\Delta = \int \frac{P(x)}{EA(x)}dx = \frac{1}{EA}\int_0^L \gamma A x \, dx \longrightarrow \Delta = \frac{\gamma}{E}\cdot\frac{L^2}{2} = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

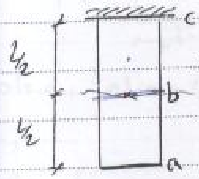
بار گسترده γA را به صورت بار متمرکز در مرکز ثقل جسم وارد می‌کنیم

روش دیگر (راه دیگر):

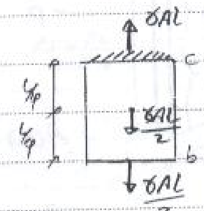


$$\Delta = \frac{\gamma A L \cdot L/2}{EA} = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

تغییر مکان وسط میله چقدر است؟



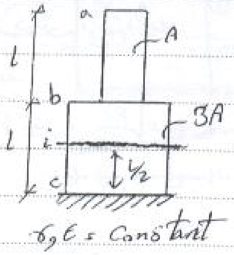
ثابت $= \gamma, A, E$



$$\Delta_{bc} = \frac{\frac{\gamma A L}{2}\cdot L/4}{EA} + \frac{\frac{\gamma A L}{2}\cdot L/2}{EA} \longrightarrow \Delta_{bc} = \frac{3}{8}\frac{\gamma L^2}{E} = \frac{3\gamma L^2}{8E}$$

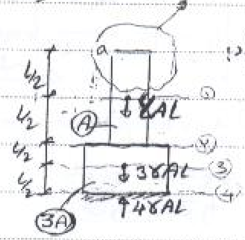
?

آیا سطح مقطع [illegible] قسمت است؟



Δa و Δb را محاسبه کنید.

محاسبه Δa :



اگر برش نزنیم چون هیچ نیرویی نمی‌گیرد Δ=0

ترسیم آزاد:

برش اندازه و مساحت مثلثی

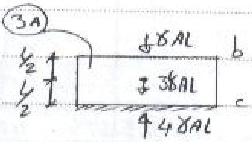
$$\Delta_a = 0 - \frac{\gamma AL \cdot L/2}{EA} - \frac{\gamma AL \cdot L/2}{3EA} - \frac{4\gamma AL \cdot L/2}{3EA} = ?$$

$$= \frac{-\gamma L^2}{E}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right] = \boxed{-\frac{4}{3}\frac{\gamma L^2}{E}}$$

محاسبه Δb :

از b به بعد را ترسیم آزاد می‌کنیم

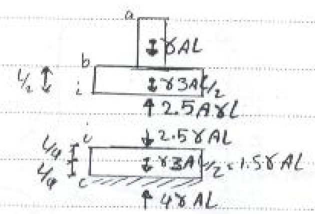
هم می‌توانیم با روش انتگرال‌گیری حل کنیم



$$\Delta_b = \frac{-\gamma AL \cdot L/2}{3EA} - \frac{4\gamma AL \cdot L/2}{3EA} \Rightarrow \Delta_b = \frac{-\gamma L^2}{E}\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)$$

$$\boxed{\Delta_b = -\frac{5}{6}\frac{\gamma L^2}{E}}$$

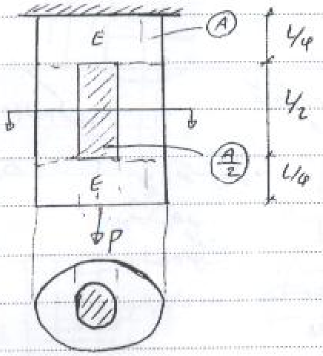
$\Delta_i = ?$

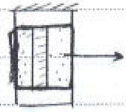


$$\Delta_i = \frac{-2.5\gamma AL \cdot L/4}{3EA} - \frac{4\gamma AL \cdot L/4}{3EA} = -\frac{13}{24}\frac{\gamma L^2}{E}$$

Subject
Date

از وزن میله صرف نظر می‌شود. تغییر مکان نقطه اثر بار متمرکز کدام است؟

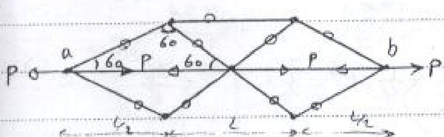




در قسمت Δ مذکور چون صلب حرکت نمی‌کند در نتیجه لوله دورش هم تغییر نمی‌کند.

$$\Delta = \frac{P\,L/4}{EA} \times 2 = \frac{PL}{2EA} = ?$$

نقاط a و b چقدر از هم دور می‌شوند؟

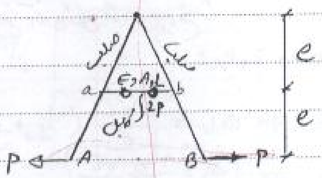


E,A = Constant

$$\Delta_a = \frac{P(2L)}{EA} \times 2$$

چرا؟

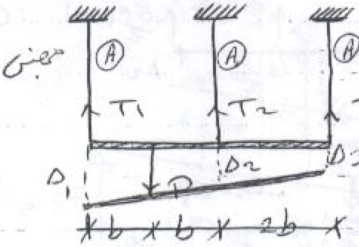
تغییر مکان در نقطه A و B ؟



$$\Delta_P = 2\Delta_{کابل} = 2 \times \frac{2PL}{EA} = \frac{4PL}{EA}$$

ضمن تجزیه تالس تغییر مکان که نصف تغییر مکان AB است.

86/10/2 (I) مقاومت مصالح



$T_1 + T_2 + T_3 = P$ (1)

$T_1 b - T_2 b - T_3(3b) = 0$

$T_1 - T_2 - 3T_3 = 0$ (2)

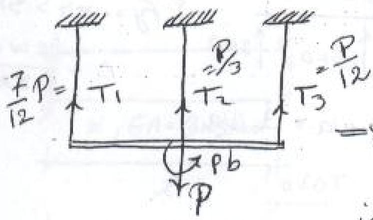
روابط سازگاری: $\Delta_1 + \Delta_3 = 2\Delta_2$

$$\frac{T_1 l}{EA} + \frac{T_3 l}{EA} = 2\frac{T_2 l}{EA}$$

$T_1 + T_3 = 2T_2$ (3) (1),(2),(3) $\Rightarrow$ ...

روش پیاده‌روی

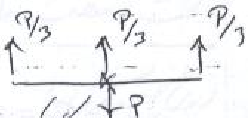
روش (2) : در جسم صلب می‌توان نیرو را منتقل کرد.

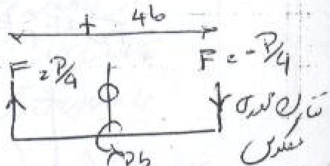


$\Rightarrow$ Supper Position =

مرکز سختی = مرکزی که نیرو اگر آنجا در اجزای سازه تغییر شکل یکسان می‌دهد.

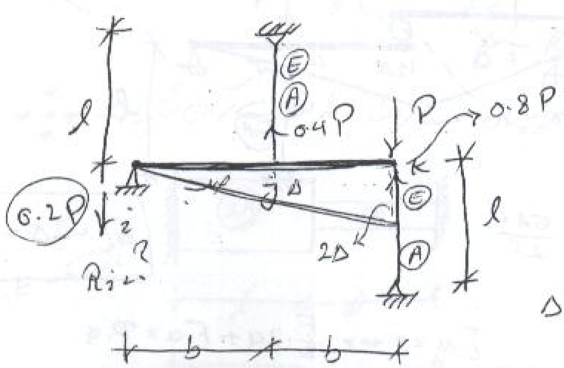
? =





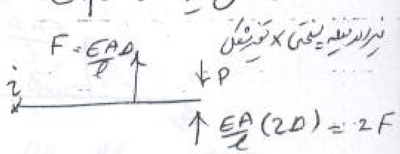
$Pb = F \cdot 4b$

$F = \frac{P}{4}$



عکس‌العمل تکیه‌گاه i کدام است؟

نیرو در میله = سختی × تغییر شکل



$\Delta = \frac{Pl}{EA} = \frac{P}{\frac{EA}{l}}$ سختی

$\sum M_i = 0 \Rightarrow F \times b + 2F \times 2b = P \cdot 2b$

$F + 4F = 2P$

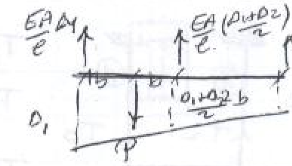
$5F = 2P$

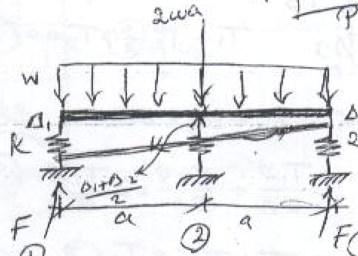
$\boxed{F = \frac{2}{5}P = 0.4P}$

در اینجا به دنبال مرکز سختی نیستیم چون Δ یکسان ندارند.

II

شکل اول در روش تنش:

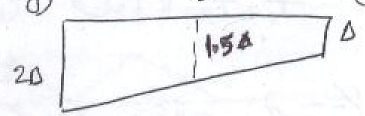


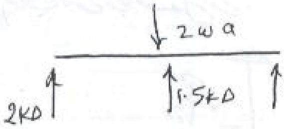


چون تیر صلب است لذا باید شکسته نشود می‌ماند.

از روی اصل سازگاری به نتیجه می‌رسیم فنر (2k) و (k) است چپ و راست برابرند

پس Δ فنر K دو برابر Δ 2k است.



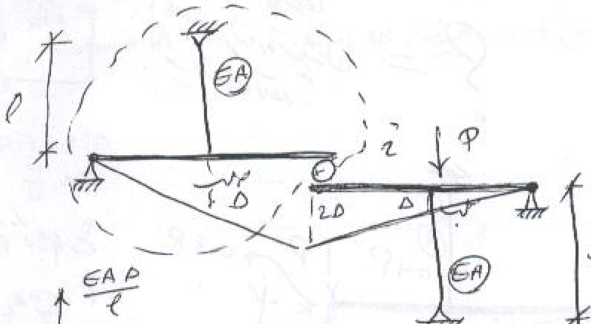


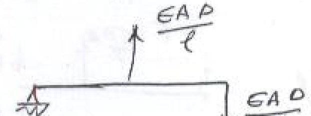
$\sum F_y = 0 \Rightarrow 5.5K\Delta = 2wa$

$\Delta = \frac{2wa}{5.5K}$

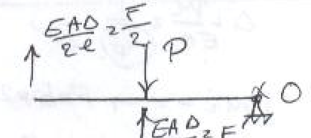
$F_1 = F_3 = 2K \cdot \frac{2wa}{5.5K} = \frac{4}{5.5} wa = \frac{8}{11} wa$

$F_2 = 1.5K\Delta = \frac{6}{11} wa$





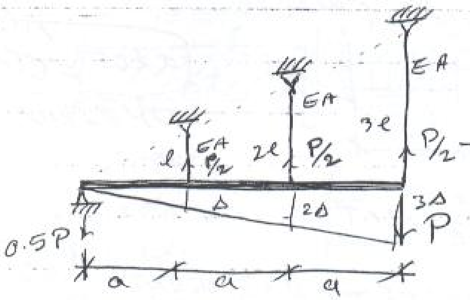
$\boxed{\Delta_2 = 2\Delta = \frac{P\ell}{EA}}$

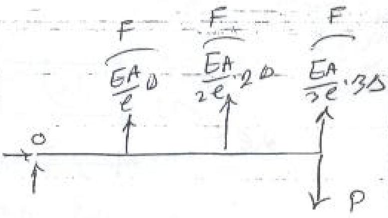


$\sum M_O = 0 \Rightarrow \frac{F}{2} \cdot 2a + F \cdot a = P \cdot a$

$2F = P \quad \boxed{F = \frac{P}{2}}$

III





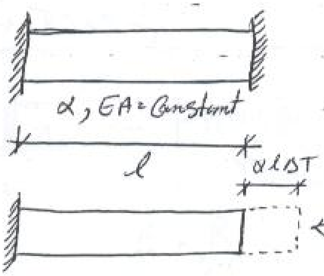
$\sum M_o \circlearrowleft^{+} = 0$

$Fa + F(2a) + F(3a) = P(3a)$

$6F = 3P \quad \boxed{F = \frac{P}{2}}$

= برای سیستم‌های نامعین تحت اختلاف دما:

حال اگر میله را به اندازه ΔT گرم کنیم تنش در میله چقدر است.



(روش جمع آثار نیرو)

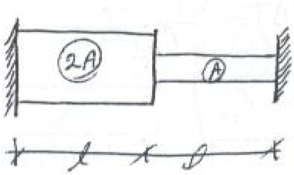
اگر آزاد باشد $\alpha l \Delta T$ تغییر طول می‌دهد

R باید طوری باشد که تغییر طول را جبران کند و آن را برگرداند تا تکیه‌گاه‌ها جابجا نشوند.

$\frac{Rl}{EA} = \alpha l \Delta T \quad R = \alpha EA \Delta T$

$\sigma = \frac{R}{A} = \alpha E \Delta T$

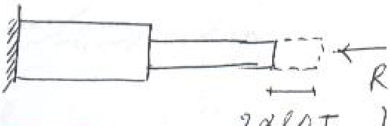
*** هرچه میله سخت‌تر باشد تأثیر حرارت بر آن شدیدتر است



$\alpha, E =$ ثابت

$\sigma_{max} = ?$

$\frac{Rl}{EA} + \frac{Rl}{2EA} = 2\alpha l \Delta T$



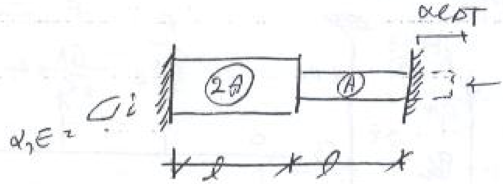
$1.5\frac{R}{EA} = 2\alpha \Delta T$

$R = \frac{4}{3}\alpha EA \Delta T$

$\sigma_{max} = \frac{R}{A} = \frac{4}{3}\alpha E \Delta T$

R در همه میله ثابت است ← σ_{max} در جایی که A کمتر است اتفاق می‌افتد

IV



اگر تکیه‌گاه سمت راست بیاید به اندازه $\alpha l\Delta T$

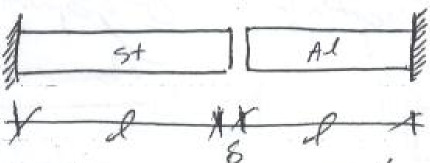
جابجایی صفر است و R در روابط وارد می‌شود

$$\frac{Rl}{EA}+\frac{Rl}{2EA}=\alpha l\Delta T$$

$$1.5\frac{R}{EA}=\alpha l\Delta T \Rightarrow R=\frac{2}{3}\alpha EA\Delta T \qquad \boxed{\sigma=\frac{2}{3}\alpha E\Delta T}$$

اگر سمت چپ را گرم کنیم

باز هم جواب همان قبل است.



تنش حرارتی در کدام بیشتر است.

اگر به اندازه ΔT گرم کنیم.

$\alpha_s=\alpha_a$ هر دو یکسان است

$A_{st}=A_{al}$ بخاطر اینکه نیروها با هم برابرند

که تنش یک نیروی اتصال تقسیم بر A که هم یکسان

است پس تنش یکسان است.

در طول کدام تغییر طول کدام بیشتر است:

هر دو به یک اندازه Δ می‌کنند $(\alpha l\Delta T)$ اما چون st

سختی‌اش بیشتر است کمتر عقب می‌رود.

$$\Delta l_{st}=\alpha l\Delta T-\frac{Rl}{E_s A_{st}}$$

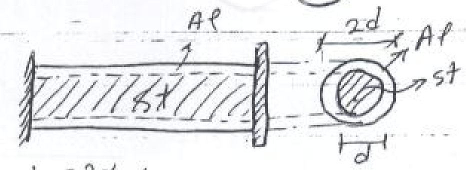
$$\Delta l_{al}=\alpha l\Delta T-\frac{Rl}{E_a A_{al}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta l_{st}>\Delta l_{al}}$$

V

وضعیت تنش دائمی شکل مجموعه را اگر به اندازه ΔT گرم کنیم:

$$\frac{Pl}{E_{st}A_{st}}+\frac{Pl}{E_{al}A_{al}}=\alpha_0 l\Delta T$$



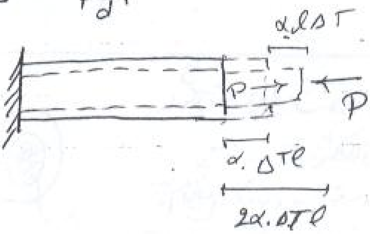
$\alpha_{st}=2\alpha_{al}$

$\alpha_{al}=\alpha_0$

$\alpha_{st}=2\alpha_0$

$E_s=3E_{al}=E_0$

$E_s=3E_0$



$A_{st}=\frac{\pi}{4}d^2=A_0$

$A_{al}=\frac{\pi}{4}(4d^2-d^2)=3A_0$

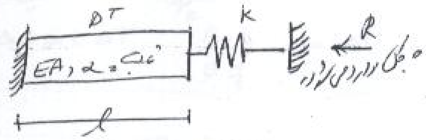
$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{3E_0A_0}+\frac{1}{3E_0A_0}\right)=\alpha_0\Delta T$$

$$P=\frac{3\alpha_0 E_0 A_0 \Delta T}{2}$$

$$\sigma_{st}=\frac{P}{A_{st}}=\boxed{\frac{3}{2}\alpha_0 E_0\Delta T}$$

$A_{st}=A_0$

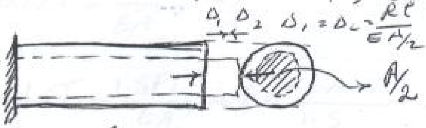
اگر میله را به اندازه ΔT گرم کنیم نیروی فنر چقدر است؟



$$\frac{R}{k}+\frac{Rl}{EA}=\alpha l\Delta T$$

$$R=\frac{\alpha\Delta T}{\frac{1}{k}+\frac{l}{EA}}$$

اگر قسمت مرکزی میله با شعاعی برابر نصف سطح مقطع میله به اندازه ΔT گرم شود تنش حداکثر در میله چقدر است؟



قسمت میله به اندازه $\alpha l\Delta T$ به طرف راست می‌رود
سطح خارجی قسمت‌ها با هم بسته‌اند کشش می‌کنند

$$\frac{Rl}{EA/2}\times 2=\alpha l\Delta T$$

جمع R

$$\frac{4R}{EA}=\alpha\Delta T$$

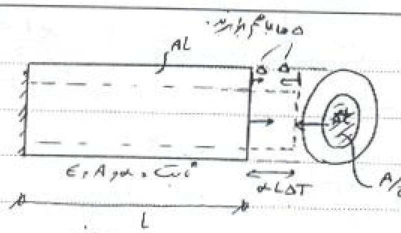
$$R=0.25\alpha EA\Delta T$$

Δ کل: در شکل میله

$$\alpha l\Delta T-\frac{R\cdot l}{E\,A/2}=\alpha l\Delta T-\frac{2\times 0.25\alpha l E\Delta T}{E A}=0.5\alpha l\Delta T$$

$$\sigma_{max}=\frac{R}{A/2}=0.5\alpha E\Delta T$$

Subject
Date



اگر قسمت مرکزی میله با سطح مقطع برابر نصف سطح مقطع (قسمت بیرونی) آن میله به اندازه ΔT گرم شود تنش حداکثر؟

بخش میانی میله می‌خواهد حرکت کند ولی چون به قسمت ثابت وصل است و سازگاری حاکم است،

پس قسمت کشیده و فشرده می‌شود و تکیه‌گاه A ایجاد می‌گردد.

چون سطح A یکی است پس تنش‌ها برابر می‌شوند.

* تنش نیمه بیرونی و داخلی Al و St هر دو $\frac{A}{2}$ می‌باشد.

چون تنش‌ها برابرند

$$\frac{RL}{E\frac{A}{2}}\times 2=\alpha L\Delta T$$

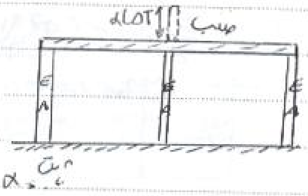
$$\frac{4R}{EA}=\alpha\Delta T \longrightarrow R=0.25\,\alpha EA\Delta T$$

توجه

پس تنش در هر دو قسمت یکی است چون سطح $\frac{A}{2}$ (یکسان است)

$$\sigma_{max}=\frac{R}{A/2}=0.5\,\alpha E\Delta T$$

$$\Delta=\alpha L\Delta T-\frac{R.L}{E\frac{A}{2}}=\alpha L\Delta T-\frac{2\times 0.25\,\alpha E\Delta T L}{EA}=0.5\,\alpha L\Delta T$$



مجهول: سطح مقطع یکی L و α ثابت

اگر میله وسطی را به اندازه ΔT گرم کنیم نیرو در میله‌ها؟

تغییر شکل منفی مطلب؟

میله وسطی می‌خواهد افزایش طول بدهد میله‌های بغلی نگه می‌دارند

سازگاری: تغییر میله‌ها با هم برابرند.

پس میله وسطی فشرده و میله‌های کناری کشیده می‌شوند.

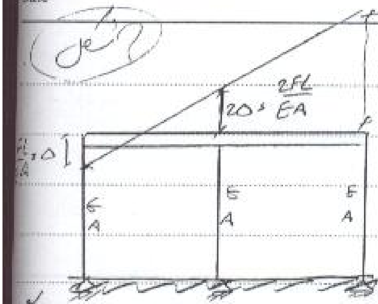
$$\alpha L\Delta T-\frac{FL}{EA}=\frac{\frac{F}{2}L}{EA}$$

$$\alpha L\Delta T=\frac{1.5FL}{EA}\longrightarrow F=\frac{\alpha EA\Delta T}{1.5}$$

$$\sigma_{max}=\frac{F}{A}=\frac{2}{3}\alpha E\Delta T$$

نیروهای کناری میله‌ها $=\frac{F}{2}=\frac{\alpha EA\Delta T}{3}$ کشش

Subject
Date



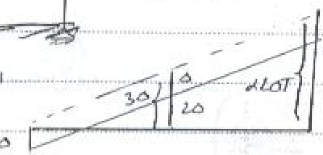
اگر میله سمت راست را به اندازه ΔT گرم کنیم.

آن میله‌ای که می‌خواهد افزایش طول بدهد سیستم نمی‌گذارد

چون سیستم نامعین است این نیرو را تحت فشار قرار می‌دهد.

شروع از سمت چپ چون سمت راست دارای دو مجهول افزایش و مجهول زیاد دارد.

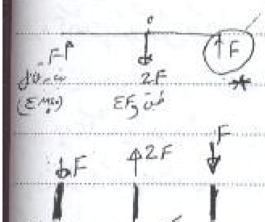
تغییر شکل



$$3\Delta = \frac{\alpha L \Delta T}{2}$$

$$\Delta = \frac{\alpha L \Delta T}{6}$$

روش کار: پس بر عکس ... از سمت چپ و عکس



$\boxed{2F = \frac{\alpha EA\Delta T}{3}}$ نیرو در میله‌ها

$$\frac{FL}{EA} = \Delta = \frac{\alpha L \Delta T}{6}$$

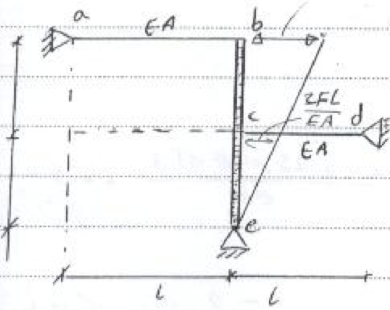
$$F = \frac{\alpha EA \Delta T}{6}$$

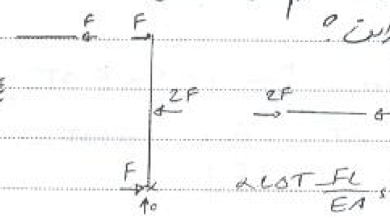
آن میله‌ای که می‌خواهد افزایش طول دهد (گرم شود) سیستم آن نیرو وارد می‌کند چون میله‌ای که گرم می‌شود به آن نیرو وارد می‌کند این نیرو را F می‌گذاریم

سیستم جلوگیری از افزایش طول می‌کند آن فشار وارد می‌کند $\alpha \Delta T - \frac{FL}{EA}$

اگر میله AB را به اندازه ΔT گرم کنیم تغییر شکل

افقی نقطه C چقدر است؟





$$\alpha L\Delta T - \frac{FL}{EA} = 2 \times \frac{2FL}{EA}$$

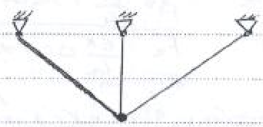
$$\frac{5FL}{EA} = \alpha L \Delta T$$

$$F = 0.2\alpha EA\Delta T$$

PAPCO

Subject
Date

۲

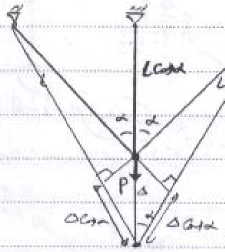


هر سه میله را به اندازه ΔT گرم کنیم وضعیت تنش

در میله ها ؟

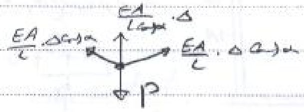
میله‌های مورب چون طول بیشتری دارند تغییر طول بیشتری می‌دهند و

سازگاری حفظ نمی‌شود و مورب‌ها فشرده شوند تا به هم برسند.



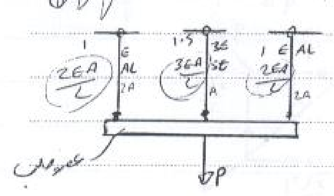
بنا به تقارن گره وسط Δ افقی ندارد.

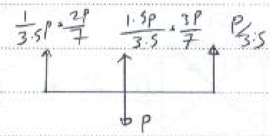
$$\sum F_y=0 \rightarrow \frac{EA}{L}\Delta\cos^2\alpha\times 2+\frac{EA}{L\cos\alpha}\Delta=P$$



سوالات ۸۶ "Δ" ست از این تست ها * خیلی خیلی مهم

تعیین نیروهای داخلی





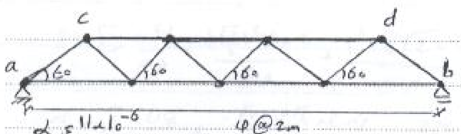
نیرو به نسبت سختی

جابجایی نقطه B به اندازه 20 درجه تغییر حرارت چقدر است.

کار مجازی هم می‌توان بریم.

سیستم معین و نیرو در آن سیستم بوجود نمی‌آید

جابجایی نقطه b همان جابجایی اعضای پائینی است

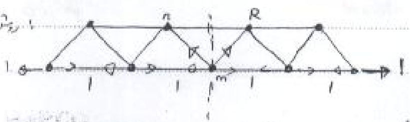


$\alpha=11\times10^{-6}$ $4@2m$

$E=2\times10^5$ MPa $\boxed{\delta_b=?}$

$$\delta_b=4\alpha L\Delta T=4\times(11\times10^{-6})\times(2)\times(20)\times1000=176$$

روش کار مجازی

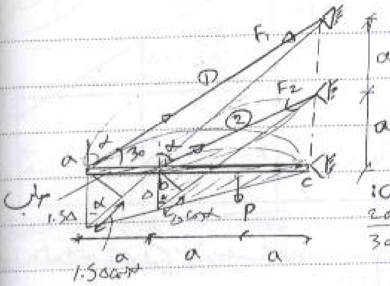


$1\times\delta_b=\sum u\cdot\alpha L\Delta T$

$\delta_b=4\alpha L\Delta T$

* بنا به تقارن کشش کشش و بنابر تقارن کشش فشار پس تقارن و تقارن در اینجا. متناقضند پس نیرو در عضو صفر است.

تحلیل سازه



$\frac{F_1}{F_2} = ?$

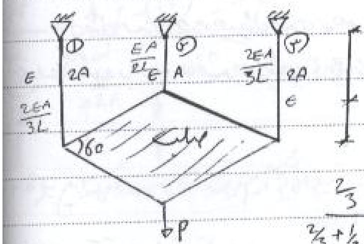
حرکت افقی صلب در تمام نقاط یکسان است

$\frac{2a}{3a} = \frac{\Delta}{1.5\Delta}$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{EA}{L_1} 1.5\Delta\cos\alpha}{\frac{EA}{L_2}\Delta\cos\alpha} = \frac{1.5L_2}{L_1}$$

$1.5 \times 2/3 = 1$

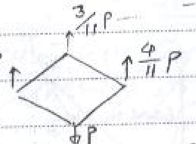
جسم صلب تغییر شکل ندارد :



نیرو متناسب با سختی هر عضو تغییر طول یکسان دارد .

$\Sigma F_y = 0 \to \frac{3}{11}P$

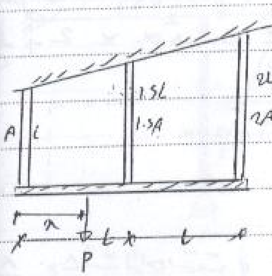
$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}P = \frac{4}{11}P$$

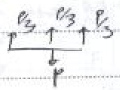


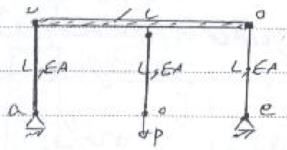
موقعیت بار P ... نیروها برابر ... جسم صلب بطور افقی پایین می‌رود

سختی یکسان دارد چون طول و A افزایش یافته ... ۲ برابر افزایش یافته

سختی $\frac{EA}{L}$ → K ثابت



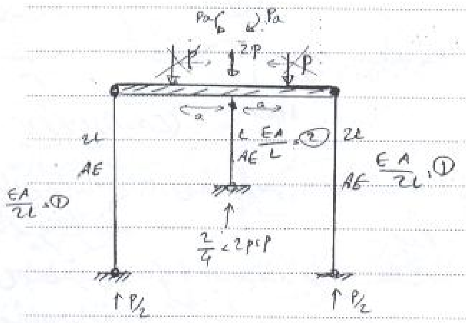




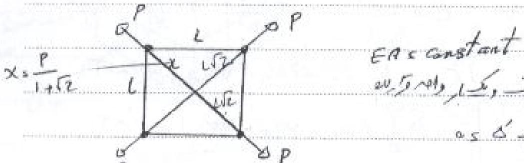
تغییر مکان قائم O در صورت صلبیت bcd .

تیر صلب — میله کششی — تغییرات طولی

$$\Delta_O = \frac{PL}{EA} + \frac{\frac{P}{2}L}{EA} = \frac{1.5PL}{EA}$$



نیرو در میله‌ها



نیروی داخلی میله‌ها

$EA = constant$

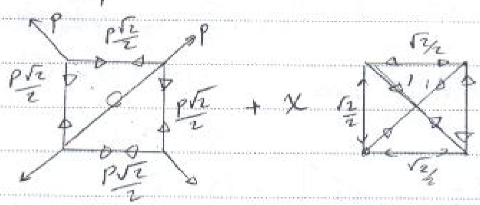
با درجه نامعینی یک، میله حذف کنیم

روش نیرو — ضریب نامعین — نیروی مجهول و یک بار واحد قرار بده

$$0 = \Delta' + x\delta$$

هر چیز از کل سیستم

$x = \frac{P}{1+\sqrt{2}}$

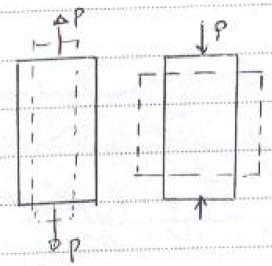


$$\delta = \sum \frac{u^2 L}{EA} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 L \times 4}{EA} + \frac{1^2 \times L\sqrt{2} \times 2}{EA} = \frac{2(1+\sqrt{2})L}{EA}$$

$$\Delta' = \sum \frac{uSL}{EA} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{P\sqrt{2}}{2} \times L \times 4}{EA} = \frac{-2PL}{EA}$$

$$0 = \frac{-2PL}{EA} + x\left(\frac{2(1+\sqrt{2})L}{EA}\right) \qquad x = \frac{P}{1+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}-1)P$$

ضریب پواسون، روابط تعمیم یافته هوک:



در اثر کشیده شدن انقباض جانبی و انبساط طولی دارد.
در اثر فشرده شدن انبساط جانبی و انقباض طولی دارد.
خاصیت انقباض و انبساط جانبی را خاصیت پواسون می گویند.

$$\nu = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} \right| = \text{ضریب پواسون}$$

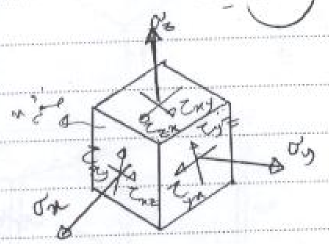
$0 < \nu < 0.5$: همه مواد جسم بین این دو حالت کرنش جانبی دارند.

0 → جسم صلب

0.5 → جسم تراکم ناپذیر (لاستیک)

کرنش طولی در امتداد نیرو ایجاد می شود و کرنش جانبی در جهت عمود بر راستای اعمال نیرو.

روابط کرنش‌های طولی:



تنش برشی کرنش زاویه ای γ ایجاد می کند (اعوجاج) و هیچ تاثیری روی ε ندارد.
هر تنشی در راستای خودش کرنش طولی ایجاد می کند.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

کشش (+)

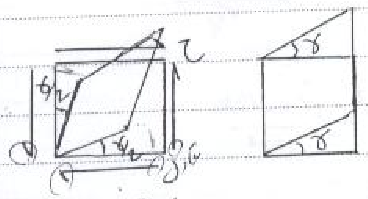
فشار (−)

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z) + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha\Delta T \end{cases}$$

α ثابت چون ماده همگن و ایزوتروپ است.

$\boxed{\Delta T}$ حرارت $\quad \varepsilon = \frac{\alpha L \Delta T}{L} = \alpha\Delta T$

دیگر تنش‌ها را صفر می گیریم τ

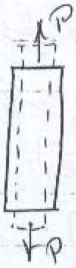


G : صلابت برشی، مدول برشی، مدول ارتجاعی در برش

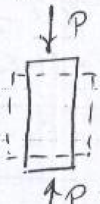
$\tau = G\gamma$

«مقاومت مصالح» 86/10/8 (I)

= ضریب پواسون، روابط تعمیم یافته هوک:



$\sigma = \frac{P}{A}$



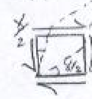
خاصیت الاستیک: اینکه جابجایی با اثر بارگذاری صفر شود
= خاصیت پلاستیک

$\nu = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} \right|$ = ضریب پواسون

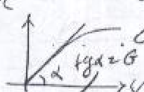
مقدار آن همواره منفی است چون در جهت P کرنش طولی + است کرنش جانبی - است

$0 < \nu < 0.5$

جسم صلب — جسم تراکم ناپذیر



G: مدول ارتجاعی برشی (صلبیت برشی)

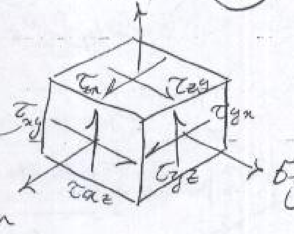


$\tau = G\cdot\gamma$ ← شیب منحنی تنش-کرنش برشی را G گویند

+ کشش
- فشار $= \sigma_z$

** تنش برشی تأثیری روی تغییر شکل‌های طولی ندارد بلکه کرنش زاویه‌ای ایجاد می‌کند:

اصل جمع آثار را در نظر می‌گیریم:



τ_{xy} ← صفحه عمود بر x جهت y

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

اثر دما:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z\right] + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z\right] + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y\right] + \alpha\Delta T$$

اثر تنش:

حرارتی $\varepsilon = \frac{\alpha l \Delta T}{l} = \alpha\Delta T$

رابطه هوک برای برش:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G\cdot\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} = G\cdot\gamma_{zx} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{cases}$$

= بین E و G و ν رابطه زیر وجود دارد:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

$0 < \nu < 0.5$

$1 < 1+\nu < 1.5$

$2 < 2(1+\nu) < 3$

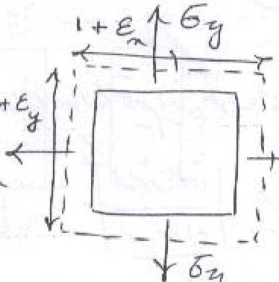
$$\boxed{2 < \frac{E}{G} < 3}$$

$E_{st} = 2.5\, G_{st}$

$G_{st} = 0.4\, E_{st}$ ← فعلاً برای فولاد در نظر می‌گیریم چون عامل خوبی نیست.

← به همین دلیل است که تا از برش بیشتر صرف‌نظر می‌کنیم چون مقاومت تنش برشی تا دو
E برابر خیلی بیشتر از G برابر است حدود 2.5 برابر یعنی جسم در مقابل
حدود 2.5 برابر جسم برشی است یعنی می‌تواند تنش‌های زیادی تحمل کند.

II



- کرنش سطحی : ε_A : تغییر سطح واحد سطح

** تنش برشی تغییر حجم را یا سطح را ایجاد نمی کند

از حاصلضرب ε ها که کم هستند صرفنظر کنیم

$$\varepsilon_A = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y) - 1$$

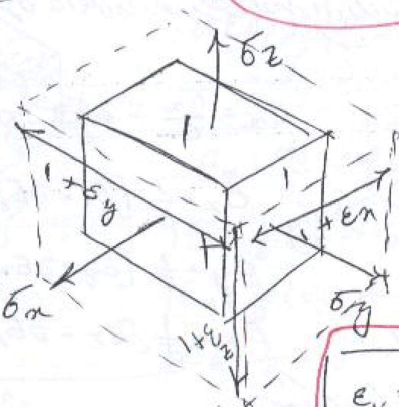
$$\boxed{\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y} \quad ***$$

کرنش سطحی = جمع دو کرنش متعامد

اثر حرارت دو بار

$$\varepsilon_A = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + 2\alpha\Delta T$$

$$\boxed{\varepsilon_A = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) + 2\alpha\Delta T}$$



- کرنش حجمی : تغییر حجم واحد حجم :

از حاصلضرب ε که خیلی کوچک است صرفنظر کنیم

$$\varepsilon_V = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1$$

$$= \boxed{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z} \quad ***$$

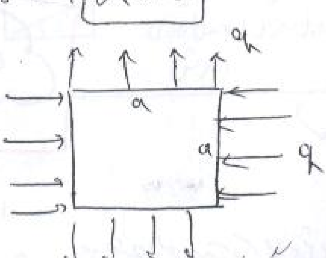
$$\boxed{\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) + 3\alpha\Delta T}$$

« در اصطلاح کرنش حجمی »

اثبات : اگر σ ها کششی + باشند حجم باید + شود ← ε مثبت و مثبت است یعنی حجم افزایش یافته است پس ضریب کرنش حجمی $1-2\nu$ همواره باید مثبت باشد .

$$1-2\nu > 0 \rightarrow \boxed{\nu < 0.5}$$

مثال : $\Delta A = ?$



$E = 100q$
$\nu = 0.25$

$$\Delta A = \varepsilon_A A_0 = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)A_0$$

$$\Delta A = \frac{1-0.25}{100q}\left[-q+q\right] = 0$$

اگر $\sigma_y = 2q$ باشد

$$\Delta A = \frac{1-0.25}{100q}\left[\frac{-2q+q}{-q}\right] \times a^2 =$$

$$\Delta A = \frac{-0.75qa^2}{100q} = -0.0075a^2 = -\frac{0.75}{100}a^2$$

«مقاومت مصالح ۲»

86/10/13

(I)

پیچش : Torsion

فرضیات :

۱- مصالح همگن (توزیع یکنواخت خواص مادی در حجم) و ایزوتروپ باشند (در هر نقطه خواص در تمام جهات یکسان باشد)

۲- خطی الاستیک بودن رفتار مصالح

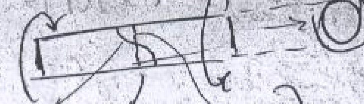
۳- کوچک بودن تغییر شکل : (منظور در محدوده الاستیک شده لازم کوچک بودن تغییر شکل ... دارای ... خودم هم شک دارم.)

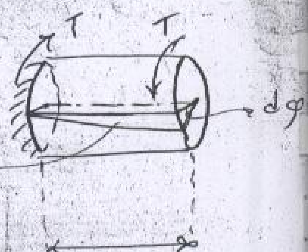
فرضیات تئوری کوچک - برنولی

فرضیات : (خاص پیچش)

۴- مقاطع عمود بر محور عضو بعد از پیچش مسطح باقی می‌مانند : (عدم اعوجاج) No warping

(این هم جزو فرضیات خطی که گفته شد است)





۵- کرنش زاویه‌ای از مبدأ در محیط به صورت خطی افزایش می‌یابد.

از خطی - الاستیک بودن و همگن و ایزوتروپ بودن می‌توان نتیجه گرفت : $\tau = G.\gamma$

۶- تنش برشی " " " " " " " " " " " " " "

توزیع خطی

«پس توزیع تنش‌ها را داریم.»

«مقاومت مصالح»

86/10/13

(I)

پیچش : Torsion

«توزیع یکنواخت خواص مادی در حجم»

فرضیات :

1- مصالح همگن و ایزوتروپ باشند ← در هر نقطه از خواص در تمام ابعاد و جهات یکسان باشند

2- خطی ارتجاعی بودن رفتار مصالح

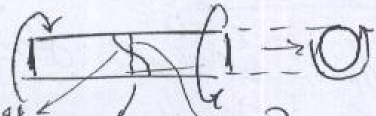
3- کوچک بودن تغییر شکل : (حصر بر جزء الاشیب شده لازم از کوچک بودن تغییر شکل‌ها ولی کافی نیست همه فرض هم بستگی دارد)

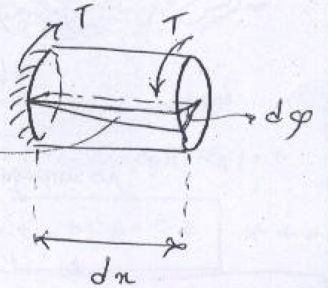
فرضیات عامی کوک - برنولی

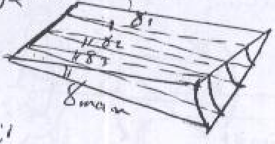
فرضیات : (خاص پیچش)

4- مقاطع کروی در محور عضو بعد از پیچش مسطح باقی می‌مانند. (عدم اعوجاج) ← No warping

اعوجاج هم جزء فرضیات خطی کوچک بودن است







تغییر زاویه‌ای (خطی رشته‌ای نیستند)

از خطی - ارتجاعی بودن و همگن و ایزوتروپ بودن می‌توان نتیجه گرفت : $\tau = G\cdot\gamma$

5- تغییر زاویه‌ای از یک دایره به دایره دیگر بصورت خطی افزایش می‌یابد.

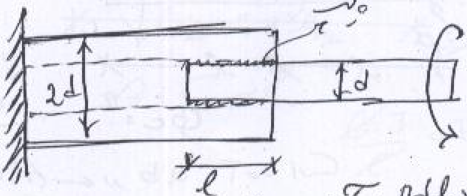
6- تنش برشی " " " " " " " " " " "

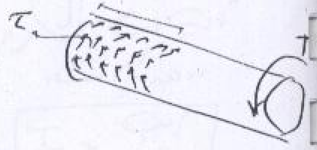
توزیع تنش

«پس توزیع تنش را یافتیم.»

IV

اگر تنش مجاز چسب (برشی) τ باشد. حداقل طول چسب باید چقدر باشد تا چسب بتواند گشتاور T را انتقال دهد.





$$\tau \cdot \underbrace{\pi d l}_{\text{مساحت جانبی}} \times \underbrace{\frac{d}{2}}_{\text{بازوی}} = T$$

تنش توزیع در محیط چسب ← باید با T برابر باشد

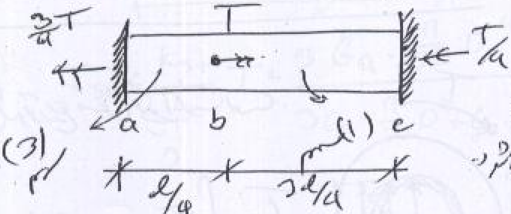
بازوی نیرو

$$\boxed{l = \frac{2T}{\pi d^2 \tau}}$$

سیستم نامعین کنید

پیچش:

$\frac{G\cdot J}{l}$ تابع

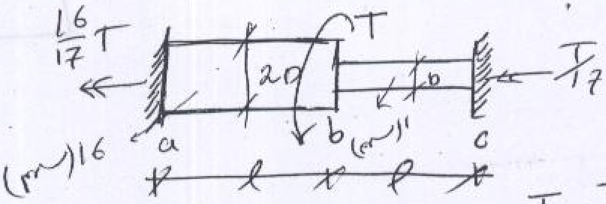


مثل بار نیرو در محوری است

اگر مقطع یکسان باشد به نسبت سختی توزیع می‌شود

$G\cdot J =$ ثابت ، سختی $\left(\frac{G\cdot J}{l}\right)$

$$\varphi_b = \varphi_{b/a} = \varphi_{b/c} = \frac{\frac{3}{4}T\cdot\frac{l}{4}}{G\cdot J} = \boxed{\frac{3Tl}{16GJ}}$$



G ثابت

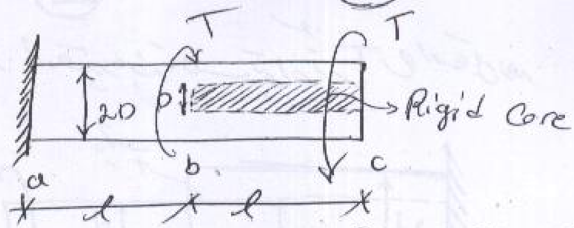
$T_a, T_c = ?$

$$\boxed{J_{ab} = 16 J_{bc}}$$

τ_{max} کجاست:

$\tau = \frac{T\cdot c}{J}$ ← در وقت چسب در ابتدا است.

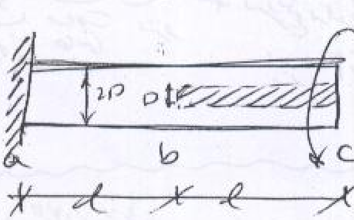
III



$\varphi_c = ?$

$\varphi = 0$

در bc تغییر زاویه نداریم ← در ab $T_0 = T$ است.

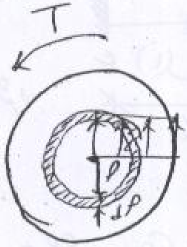


$$\varphi_c = \varphi_{c/a} = \frac{T\ell}{G(\frac{\pi}{32}2D^4)} = \frac{T\cdot\ell}{16GJ_0}$$

$$+\cancel{\varphi_{ab}}$$

$$J_0 = \frac{\pi}{32}D^4$$

اگر سطح مقطع ما جامد باشد توزیع تنش یکنواخت است.



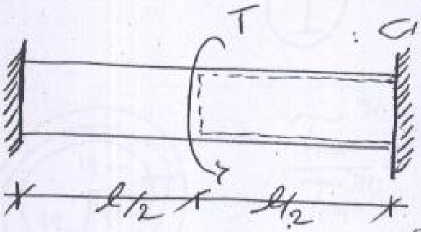
$$T = \int_0^c \tau\cdot 2\pi\cdot\rho\, d\rho\cdot\rho = 2\pi\tau\int_0^c \rho^2 d\rho$$

(ثابت است)

$$\boxed{\tau = \frac{3T}{2\pi c^3}}$$

(V)

τ_{max} کجاست: ← در هر دو ثابت است



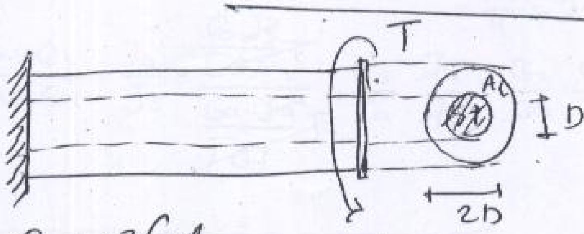
$\tau = \frac{T \cdot c}{J}$ ← ثابت است

ثابت است

در همه جاست

G = ثابت

$\frac{G \cdot J}{\ell} = T \rightarrow \boxed{\frac{T}{J} = \text{ثابت}}$



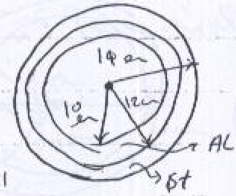
$G_{st} = 3G_{al}$

ℓ

$$T_{st} = \frac{K_{st}}{\sum K} T = \frac{3G_a \cdot \frac{\pi}{32} D^4}{3G_a \cdot \frac{\pi}{32} D^4 + G_a \frac{\pi}{32}\left((2D)^4 - D^4\right)} \times T = \frac{3}{3+15} T$$

$$= \frac{T}{6} \times 100 \simeq 16.7\%$$

86/10/20 (I) « مقاومت مصالح »



$$\frac{\tau_{max}^{st}}{\tau_{max}^{AL}} = ?$$

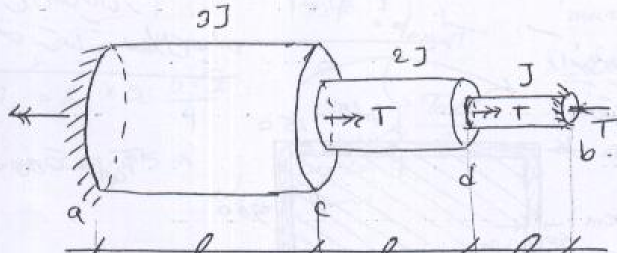
$G_{st} = 3\,G_{al}$

$$\frac{\tau_{max}^{st}}{\tau_{max}^{AL}} = \frac{C_s}{C_a}\cdot\frac{G_s}{G_a} = \frac{14}{12}\times\frac{3}{1} = \frac{14}{4} = 3.5$$

روش دوم:

$$\tau = \frac{T\cdot C}{J} \qquad \frac{\tau_s}{\tau_a} = \frac{T_s}{T_a}\cdot\frac{C_s}{C_a}\cdot\frac{J_a}{J_s} = \frac{\frac{G_s \cancel{J_s}}{\cancel{\sum GJ}}\cancel{T}}{\frac{G_a\cdot \cancel{J_a}}{\cancel{\sum GJ}}\cancel{T}}\cdot\frac{C_s}{C_a}\cdot\frac{\cancel{J_a}}{\cancel{J_s}} = \frac{G_s}{G_a}\cdot\frac{C_s}{C_a}$$

مثال (تمرین): $T_a, T_b = ?$



T_a ; $\frac{7}{11}T$ — T_b ; $b \cdot \frac{15}{11}T$

تعادل و سازگاری

$$\frac{T_a\cdot l}{3GJ} + \frac{(T_a - T)\,l}{2GJ} + \frac{(T_a - 2T)}{GJ} = 0$$

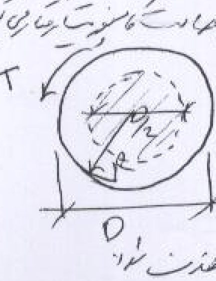
$$2T_a + 3T_a - 3T + 6T_a - 12T = 0$$

$$11\,T_a + 15\,T = 0 \qquad \boxed{T_a = \frac{15}{11}T}$$

$$T_a + T_b = 2T$$

$$T_b = 2T - \frac{15}{11}T = \boxed{\frac{7}{11}T}$$

مثال: تحت ... به قطر $D/2$ چند درصد از نیروی پیچشی T را تحمل می‌نماید؟ (روش صحیح است که ... کنیم)



$$T' = \frac{J'}{J}\,T = \frac{\frac{\pi}{32}\left(\frac{D}{2}\right)^4}{\frac{\pi}{32}D^4}\,T = \frac{1}{16}T$$

توزیع — نسبت سختی

G و L چون یکی هستند حذف شوند

II

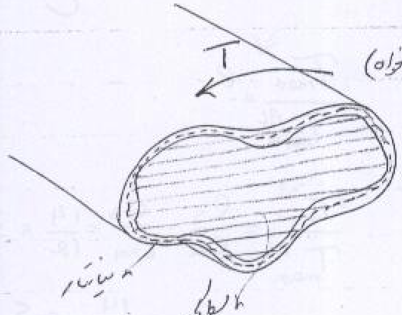
$\tau = \dfrac{T}{2A_t\, t}$ $J = \dfrac{4A_t^2}{\oint \frac{ds}{t}}$

مقاطع جدار نازک بسته: (جدار متغیر - شکل دلخواه)

شرط: جداره نازک در طول تغییر شکل نداده باشد:

۱- در هر نقطه تنش عرضی جداره یکنواخت است.

۲- در طول میان تار تنش هم جهت T به نسبت عکس ضخامت تغییر می‌کند:



Torsional Area

$$\boxed{\tau = \frac{T}{2A_T\, t}}$$

سطح محصور در میان تار

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J} \qquad J = \frac{4A_T^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$

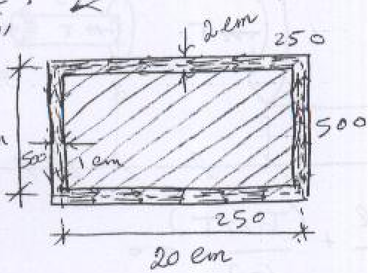
مجموع طول میان تار / ضخامت میان تار در طول جداره

مثال: $\tau_{all} = 500\ kg/cm^2$

بیشترین تنش τ_{max} به تنش مجاز برسد.

$T_{max} = ?\ t.m$

... با این نیرو وارد بر مقطع
50x20x2 افقی
,000 kg
ton 10cm



$\tau_{max} = \tau_{all}$

$$\frac{T_{max}}{2A_T \cdot t_{min}} = \tau_{all}$$

$$T_{max} = 2A_T \cdot t_{min} \cdot \tau_{all}$$

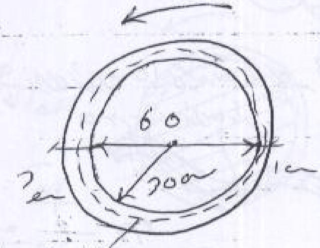
$$T_{max} = 2 \times 200 \times 1 \times 500 = 200{,}000\ kg/cm$$

$$= 2\ t.m$$

$$J = ? = \frac{4A_T^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4(200)^2}{\frac{20}{2}\times 2 + \frac{10}{1}\times 2} = 4000\ cm^4$$

$T = 10\ t.m$

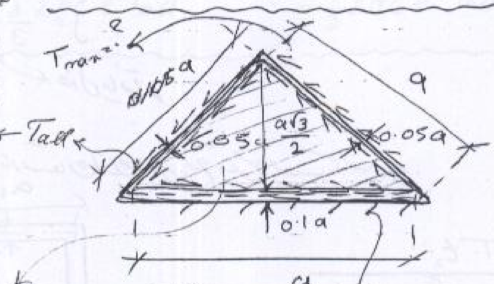
III



[illegible] تنش از [illegible]

مستطیل [illegible] در راستای ضلع [illegible]

$$\tau_{max} = \frac{T}{2A_t \cdot t_{min}} = \frac{10 \times 10^5}{2 \times \pi (31)^2 \times 1}$$



τ_{all} ← در متقارن تنش صفحه

τ_{all}

$\tau_{max} = \tau_{all}$

$$\frac{T_{max}}{2A_t \cdot t_{min}} = \tau_{all}$$

$$T_{max} = 2A_t \cdot t_{min} \cdot \tau_{all}$$

$$= 2 \times a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \times 0.05a \cdot \tau_{all}$$

$$= 0.025\sqrt{3}\, a^3 \tau_{all} = \frac{\sqrt{3}}{40} a^3 \tau_{all}$$

$$A_t = 2 \times a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$t_{min} = 0.05a$$

$\frac{\tau_{all}}{2}$ ← که مقدار در راستای نسبت عکس دارد

مقاطع جدار نازک باز : L , [, T , I

** مقاطع بالا را می‌توان به صورت مجموع مقاطع ← پیچش مقاطع مستطیلی: از تئوری الاستیسیته و مقاومت مصالح پیشرفته

تنش ماکزیمم در وسط ضلع بزرگتر رخ می‌دهد

$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha a b^2}$$

α و β را بر حسب $\frac{a}{b}$ جدول داریم:

مقاومت مصالح : دکتر [illegible]

$$\boxed{\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J}}$$

$$\boxed{J = \beta a b^3}$$

a/b	α	β
⋮	⋮	⋮
1	1	.

$2 \times b^2 \cdot t \cdot \tau$ $\qquad \frac{1}{3}\, 2bt^2 \cdot \tau$

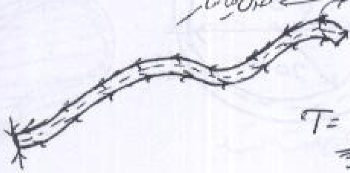
$$\frac{2b^2 t}{\frac{2}{3} b t^2} = \frac{3b}{t}$$

IV

تذکر: زمانی که $\frac{a}{b}$ زیاد شود (۱۰ <) مقادیر α و β ثابت می‌مانند (در حد لیمیت تبدیل می‌شوند)

$\lim \alpha, \beta = \frac{1}{3}$

$\frac{a}{b} \to 10$



$a \leftarrow$ طول میانتار

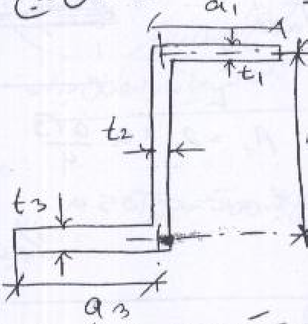
$b = t$

$$\tau = \frac{T}{\frac{1}{3}at^2} = \frac{T \cdot t}{\frac{1}{3}at^3} = \frac{T \cdot t}{J}$$

$$J = \frac{1}{3}\, a\, t^3$$

$a \leftarrow$ طول میانتار ، $t \leftarrow$ ضخامت

اگر ضخامت متغیر باشد: با استفاده از اصل توزیع تنش نسبت سختی:



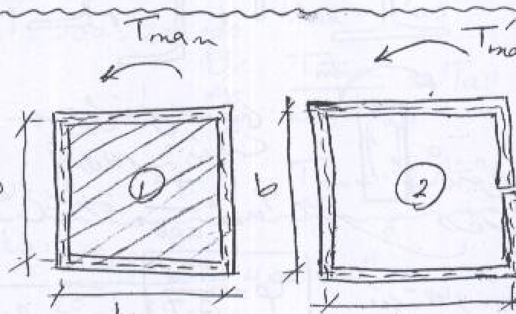
$$\tau = \frac{T \cdot t_i}{J = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} a_i t_i^3}$$

$$\varphi = \frac{T l}{G J}$$

$$J = \sum \frac{1}{3} a t^3 = \frac{1}{3} a_1 t_1^3 + \frac{1}{3} a_2 t_2^3 + \frac{1}{3} a_3 t_3^3$$

در این حالت تنش حداکثر جایی است که t حداکثر است. τ_{max}

مثال:



T_{max} ، T'_{max}

$$\tau_{max} = \tau_{all}$$

$$\frac{T_{max}}{2A_T \cdot t} = \tau_{all}$$

$$T_{max} = 2A_T \cdot t \cdot \tau_{all} = 2b^2 t\, \tau_{all}$$

$$\tau_{max} = \tau_{all}$$

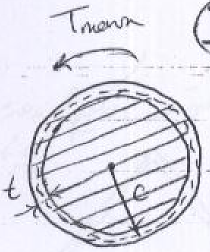
$$\frac{T_{max} \cdot t}{J} = \frac{T_{max}}{\frac{1}{3}at^2} = \tau_{all}$$

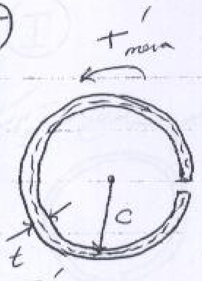
$$T_{max} = \frac{4}{3} b t^2 \tau_{all}$$

$$\frac{T_{max}}{T'_{max}} = \frac{2b^2 t\, \tau_{all}}{\frac{4}{3} b t^2 \tau_{all}} = 1.5 \frac{b}{t}$$

از مقطع (۱) بیشتر بار تحمل می‌شود در مقطع بسته اعمال شده است

V





$\tau_{max} = \tau_{all}$

$$\frac{T_{max}}{2A_t \cdot t} = \tau_{all}$$

$$\Rightarrow T_{max} = 2A_t \cdot t \cdot \tau_{all} = 2\pi c^2 t \, \tau_{all}$$

$$T'_{max} = \frac{1}{3} a t^2 \tau_{all} = \frac{1}{3} 2\pi c \, t^2 \tau_{all}$$

[illegible]

$$\frac{T_{max}}{T'_{max}} = \frac{2\pi c^2 t \, \tau_{all}}{\frac{1}{3} 2\pi c \, t^2 \tau_{all}} = \frac{3c}{t}$$

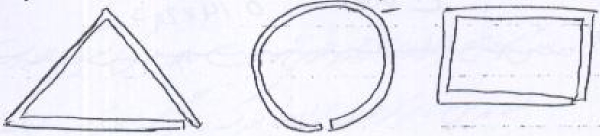
۸۹/۱۰/۲۴

مقاومت مصالح ۲

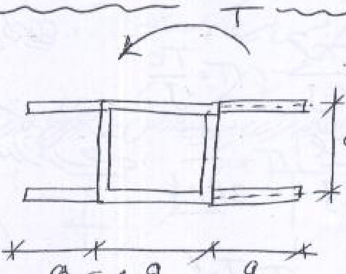
جلسه: ساعت ۴

(I)

چنانچه با پیچش بخواهیم مقطع بسازیم کدام را انتخاب می‌کنیم؟ مقطع بسته بهتر است چون
J بیشتر است.



چند درصد نیروی پیچشی T را مقطع جعبه تحمل می‌نماید؟



t = constant

مقطع از چند جزء تشکیل شده

در حالت φ برابر، به نسبت سختی توزیع می‌شود: سختی $\frac{JG}{l}$ ثابت

$= \frac{J_{Box}}{\sum J} T$

$$J_{Box} = \frac{4A_t^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4(a^2)^2}{\frac{4a}{t}} = a^3 t$$

جدار باز $= \frac{1}{3} a t^3$

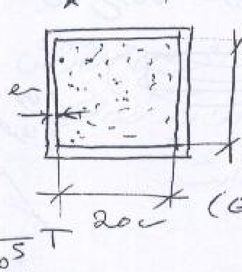
$$\Rightarrow T_{Box} = \frac{a^3 t}{a^3 t + 4 \times \frac{1}{3} a t^3} T = \frac{3a^2}{3a^2 + 4t^2} T$$

که تقریباً ... حدود ۹۵٪ را باکس دارد.

تنش حداکثر در بتن [illegible] ترکیب است؟

$10\,t.m = T$

$$\begin{cases} G_s = 8 \times 10^5 \ kg/cm^2 \\ G_c = 8 \times 10^4 \ \text{"} \end{cases}$$



توزیع به نسبت سختی:

$$\left(\frac{a}{b} = 1 \quad \begin{matrix} \alpha = 0.14 \\ \beta = 0.2 \end{matrix} \right)$$

$(GJ)_c = 8 \times 10^4 \times \beta a b^3 = 8 \times 10^4 \times 0.2 \times 20^4 = 16 \times 10^3 \times 10^7 = \Rightarrow 256 \times 10^7 \ cm^4$

$$T_c = \frac{(GJ)_c}{\sum (GJ)} T = \frac{256 \times 10^7}{256 \times 10^7 + 8 \times \underbrace{21^3 \times 10^5}_{64 \times 10^8}} T$$

$$= \frac{256}{256 + 640} T = \frac{260}{900} T = \frac{T}{3}$$

[illegible] بتن تا ... [illegible]

$$(GJ)_s = 8 \times 10^5 \times \frac{4A_T^2}{\oint \frac{ds}{t}} = 8 \times 10^5 \times \frac{21^4 \times 4}{4 \times 21}$$

$8 \times 21^3 \times 10^5 = \cancel{74}\ldots \times 10^5$

II

$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha a b^2} = \frac{\frac{13}{45}\times 10 \times 10^3}{0.14\times 20^3}$$ میزان تنش τ_{max}

= جمع بندی پیچش :

مقاطع دایره‌ای : $J=\frac{\pi}{32}d^4$ ، $\varphi=\frac{Tl}{GJ}$ ، $\tau=\frac{Tc}{J}$

مقاطع جدار نازک بسته : $J=\frac{4A_T^2}{\oint\frac{ds}{t}}$ ، $\varphi=\frac{Tl}{GJ}$ ، $\tau=\frac{T}{2A_T t}$

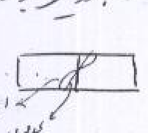
" " " باز : $J=\sum\frac{1}{3}at^3$ ، $\varphi=\frac{T\cdot l}{GJ}$ ، $\tau=\frac{T\cdot t}{J}$

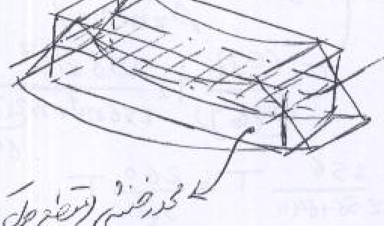
طول میانی

= خمش خالص : نیروی محوری در مقطع حضور ندارد (در خمش برشی مشکل ایجاد نمی‌کند)

Pure Bending

= فرضیات خمش :
۱- جنس ایزوتروپی مصالح
۲- الاستیک بودن رفتار مصالح
۳- کوچک بودن تغییر شکل‌ها
فرض اساسی خمش — ۴- مقاطع عمود بر محور تیر بعد از خمش مسطح باقی می‌مانند. (عدم اعوجاج warping)





محور خنثی (از مقطع عبور کرده در شکل بالا عمود بر صفحه - نمایش داده شده)

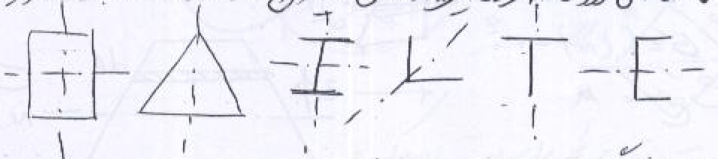
خمش ۵ - گردش طره از محور خنثی در جهت بالا و پایین تا قطع المقطع به صورت خطی افزایش می یابد. (ادامه جزوه قبل)

۶ - تنش نرمال (محوری) از محور خنثی در جهت بالا و پایین مقطع به صورت خطی افزایش می یابد.

به دلیل ۲ فرض بودن رابطه خطی کرنش و تنش و ارتجاعی بودن E ثابت و هم [illegible]

برای گردش خطی است برای تنش نیز خطی است.

= محدوده مطالعه: مقاطعی مورد مطالعه قرار می گیرند که حداقل یک محور تقارن داشته باشند. (دلیل)



= بارگذاری و خمش باید از محور تقارن یا عمود بر آن انجام شود.

اصطلاحا ما در اینجا خمش حول محور اصلی قرار می گیرد - هر مقطع دو محور اصلی دارد که یکی از آنها

است آن مقطعی که محور تقارن دارد همان محور اصلی است. در واقع تئوری ما در باره خمش

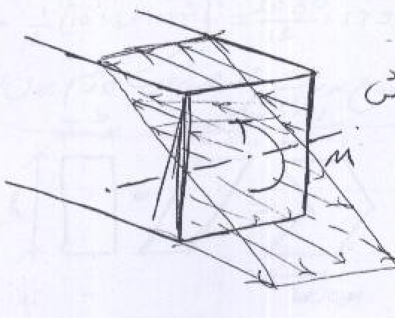
در خمش حول محور اصلی است. [illegible] این رابطه [illegible] که صادق نیست مثل

محورهای اصلی دو محور عمود بر هم سطح ... ندارند

دلیل: اگر خمش حول محور اصلی رخ ندهد توزیع تنش و گردش در عرض یکنواخت است (تقارن)

از این شده است [illegible] توزیع تنش در عرض [illegible] مرکز

محور اصلی رخ دهد.



فرض
پس این روابط می شود که محور اصلی عمود بر خمش

حول محور اصلی رخ می دهد. در نتیجه تئوری خمش

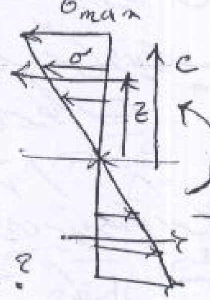
ساده قابل اعمال است.

IV

تئوری خمش: (الاستیک) ۱- موقعیت محور خنثی: $N.A = ?$

۲- رابطه σ با M چیست: $\sigma = f(M)$

$$\sigma = \frac{z}{c}\sigma_{max}$$

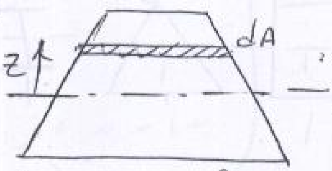


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C = T$$

در صورت حل این معادله نتیجه می‌گیریم محور خنثی از مرکز سطح عبور می‌کند $N.A$

$$\sigma = f(M) \rightarrow ?$$

اثبات:



جمع گشتاور نیروها حول محور خنثی $= M$

$$\int \sigma dA\, z = M$$

$$0 = \int \sigma dA \rightarrow \int \frac{z}{c}\sigma_{max} dA \Rightarrow$$

$$M = \int \frac{z}{c}\sigma_{max} dA \cdot z \Rightarrow$$

$$\frac{\sigma_{max}}{c} \int z^2 dA \rightarrow I_{N.A}$$

$$\frac{\sigma_{max}}{c} \int z\, dA = 0$$

گشتاور اول سطح

ممان اینرسی (I)

پس محور خنثی از مرکز سطح عبور می‌کند

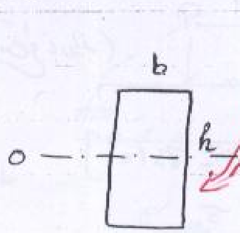
$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot c}{I_{N.A}} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{M \cdot z}{I}}$$

c = فاصله محور خنثی تا دورترین تار

تنش در هر نقطه

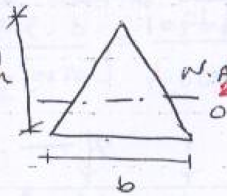
۸۹/۱۰/۲۴ (I) «مقاومت مصالح»

محاسبه I: (ممان اینرسی):

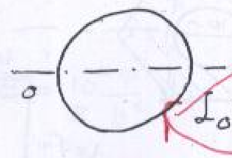


$I_o = \frac{1}{12}bh^3$

$I = \int z^2 dA$



$\frac{1}{36}bh^3 = I_o$



$I_o = \frac{\pi}{4}R^4$

$\frac{1}{12}a^4 = I_o$

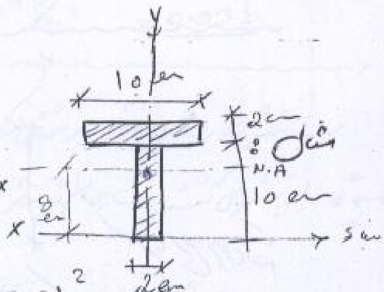
— در بسیاری حالات از قضیه محور موازی استفاده می‌کنیم:

$$I_{N.A} = \sum I_o + A d^2$$

A: سطح هر جزء

d: فاصله مرکز سطح از N.A مقطع

مثال:



$I_{min}, I_{max} = ?$

«I_x, I_y»

نسبت به محور مرکزی افقی و محور مرکزی قائم

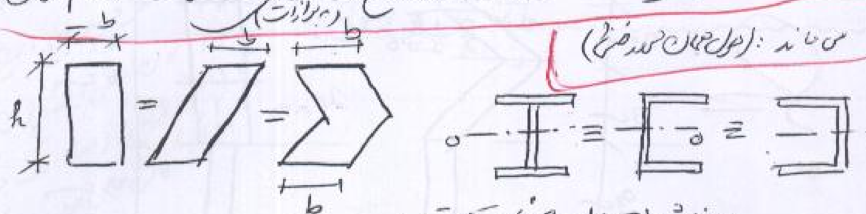
$$I_x = \frac{1}{12}\left[10\times 2^3 + 2\times 10^3\right] + 20(11-8)^2 + 20(5-8)^2$$

$$I_x = \frac{2080}{12} + 360 = 533\ cm^4$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A\cdot\bar{y}}{\sum A} = \frac{20\times 11 + 20\times 5}{40} = \frac{16}{2} = 8\ cm$$

$$I_y = \frac{1}{12}\left[10^3\times 2 + 10\times 2^3\right] = \frac{2080}{12} = 173\ cm^4$$

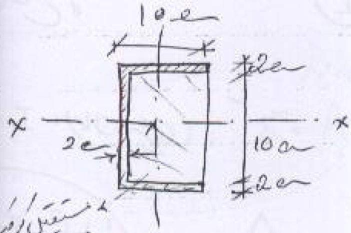
نکته: می‌توان اجزای یک section را با حفظ ارتفاع در راستای محور خنثی حرکت داد (به موازات) و هیچ ممان اینرسی ثابت می‌ماند: (حول محور خنثی)



ممان اینرسی حول o ثابت است.

II

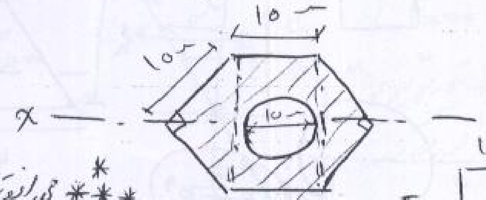
— محاسبه اینرسی افقی؟ (مقطع تقارن دارند)



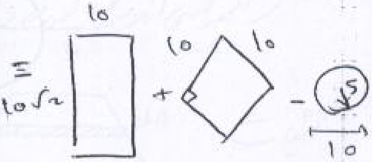
$$I_{max} = I_{x-x}$$

$$I_x = \frac{1}{12}\left[10\times 14^3 - 8\times 10^3\right]$$

مثال:



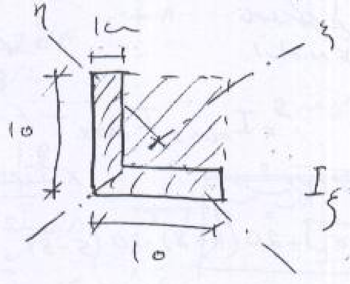
کدام افقی تری است.



$$I = \frac{1}{12}\left[10\times(10\sqrt{2})^3 + 10^4\right] - \frac{\pi}{4}\times 5^4$$

$$= \frac{(1+2\sqrt{2})10^4}{12} - \frac{625}{4}\pi$$

مثال:

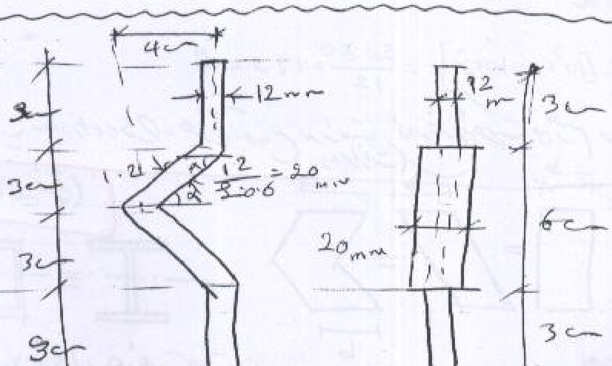


$$I_{max} = ?$$

$$I_\xi = I_{max} = \frac{1}{12}\left[10^4 - 9^4\right] = \frac{(100-81)(100+81)}{12}$$

$$= \frac{19\times 181}{12} = \frac{20\times 180}{12} = 300\ cm^4$$

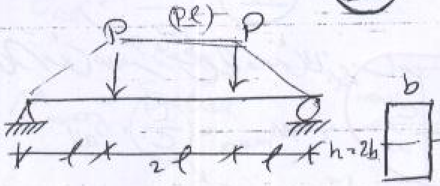
مثال:



$$I_x = \frac{1}{12}\left[1.2\times 12^3 + 0.8\times 6^3\right] = 0.1\times 12^3 + 0.8\times 18$$

(III)

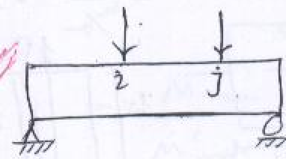
مثال: تنش max چقدر است؟



$l = 10b$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot c}{I} = \frac{P \cdot l \cdot b}{\frac{1}{12}\left[b \times 2b^3\right]} = \frac{10Pb \times b}{\frac{1}{12} b (2b)^3} = \frac{15P}{b^2}$$

$$E = 10^4 \frac{P}{b^2}$$



تغییر طول i-j چقدر است

تنش σ_{max} را

محاسبه کرده و با استفاده از رابطه

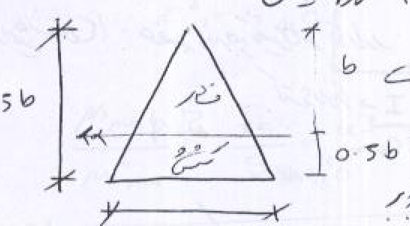
تغییر طول بدست می آوریم.

$$\sigma_{max} = E \cdot \varepsilon_{(i-j)}$$

$$\Delta_{ij} = \varepsilon \times (\text{i-j طول}) = \frac{\sigma_{max}}{E} \times 2l = \frac{\frac{15P}{b^2}}{10^4 P/b^2} \times 20b = 30b \times 10^{-4} = \underline{0.03b}$$

نسبت تنش مجاز فشاری به تنش مجاز کششی چقدر باشد تا طرح مقطع ایده آل گردد. (2)

*** باید تنش های کششی و فشاری هم زمان به تنش مجاز برسند ← مقطع ایده آل



* چون فاصله تار فشاری دو برابر تار کششی است

پس تنش تار فشاری دو برابر تنش کششی است

پس تنش فشاری مجاز نیز باید 2 برابر

تنش کششی مجاز باشد

$$\frac{\sigma_{max\,C}}{\sigma_{max\,T}} = \frac{\sigma_{all\,C}}{\sigma_{all\,T}}$$

** اگر تنش احتمال

تار کششی دو برابر بیشتر

ترجیح می دهیم این مقطع که

حال تنش باشد چون ...

آن را طوری قرار دهیم که تار

کششی در جایی صورت گیرد.

IV

- ظرفیت خمشی : بیشترین ممانی که در مقطع ما تنش مجاز برساند.

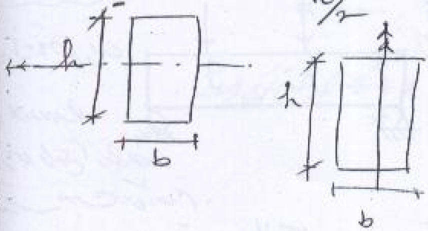
$$\sigma_{all} = \frac{M_{max}\cdot c}{I} \rightarrow M_{max} = \frac{I}{c}\cdot \sigma_{all}$$

اساس مقطع ← S → Section modulus

"مدول مقطع"

$$S_{مستطیل} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

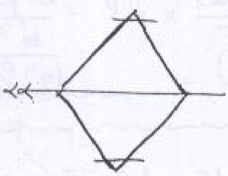
برای افزایش ظرفیت خمشی باید کاری کرد که I زیاد شود



$$\rightarrow S = \frac{hb^2}{6}$$

مثال : در یک تیر با مقطع مربع اگر دوران دهیم چه تاثیری دارد.

که زیاد می‌شود.



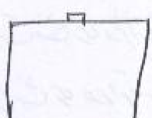
$$S = \frac{I}{c}$$

کم می‌شود / بیشتر کم می‌شود.

نتیجه : که در مقطع ما صحت ندارد.

اگر بخواهیم نسبت به حالت قبل تغییر نکند ← که هم می‌شود اما مقدار آن بسیار ناچیز است تغییر نمی‌کند

مثال : (برای ستون) حضور زائده چه تاثیری در S دارد.



$$\Rightarrow \frac{I}{c} \Rightarrow S\downarrow$$

کمتر زیاد می‌شود / زیاد می‌شود

مثال : در یک مقطع مستطیلی با دو برابر شدن ابعاد ظرفیت خمشی چه تغییری می‌کند؟ ۸ برابر می‌شود.

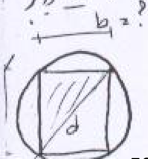
" " " دایره‌ای با دو برابر شدن قطر ظرفیت خمشی چه تغییری می‌کند؟ ۸ برابر می‌شود.

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{\pi}{4}R^4}{R} = \frac{\pi}{4}R^3$$

$$I = \frac{2\pi t c^3}{2} \leftarrow \frac{J}{2} = I \qquad J = I_x + I_y = 2I$$

در یک مقطع جدار نازک دایره‌ای با دو برابر شدن ضخامت جداره ظرفیت خمشی چه تغییری می‌کند؟ ۲ برابر

مثال : مقطع را برای یک چوب گرد با قطر d بیشترین ظرفیت خمشی را داشته باشد؟ (تیر چوبی مستطیلی) $b = ?$



S_{max} : از کنار درخت

$$h^2 + b^2 = d^2 \qquad S = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(d^2-b^2)}{6}$$

$$h^2 = d^2 - b^2$$

$$\frac{dS}{db} = 0 \Rightarrow d^2 - 3b^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = d\sqrt{\frac{2}{3}}$$

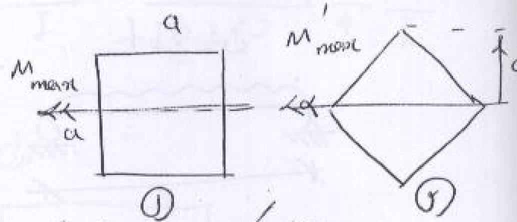
$0,43$

(I)

«مقاومت مصالح»

$$\sigma_{all} = \frac{M_{max}}{S}$$

$$M_{max} = S \cdot \sigma_{all}$$

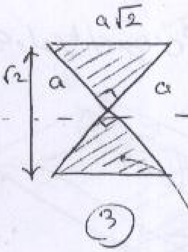


چون مقطع ثابت و σ_{all} ثابت است پس با ازای ... فقط ... مقایسه مقاطع است.

$$S_1 = \frac{bh^2}{6} = \frac{a^3}{6}$$

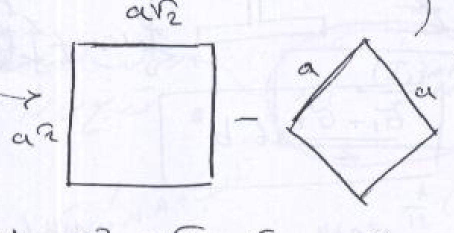
$$S_2 = \frac{I_2}{C_2} = \frac{\frac{1}{12}a^4}{a\sqrt{2}/2} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{M_{max}}{M'_{max}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{a^3}{6} \times \frac{6\sqrt{2}}{a^3} = \sqrt{2}$$



$$\frac{M_{max}}{M''_{max}} = ? \Rightarrow S_3 = \frac{I_3}{C_3} = S_3 = \frac{\frac{1}{12}\left[(a\sqrt{2})^4 - a^4\right]}{a\sqrt{2}/2} =$$

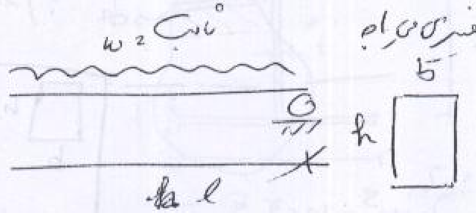
$$\boxed{\frac{a^3}{2\sqrt{2}}}$$



$$\frac{M_{max}}{M''_{max}} = \frac{S_1}{S_3} = \frac{a^3}{6} \times \frac{2\sqrt{2}}{a^3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \rightarrow \frac{S_3}{S_1} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 1.5\sqrt{2} = 2.1$$ برابر

** تیر ساده با مقطع مستطیلی مفروض است تحت بار گسترده یکنواخت می باشد. چنانچه کلیه ابعاد تیر α برابر شود تنش حداکثر در تیر و تغییر شکل حداکثر در تیر چه تغییری می کند.

$w =$ ثابت



تمام ابعاد: $b, h, l \leftarrow \alpha$ برابر

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{\frac{wl^2}{8}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{1}{\alpha}\sigma_{\text{اولیه}}$$

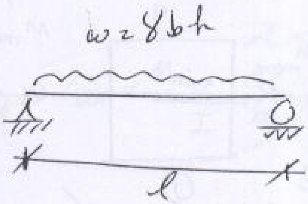
$$\Delta_0 = \frac{5wl^4}{384EI} \qquad \Delta = \frac{5w(\alpha l)^4}{384E\left(\frac{1}{12}(\alpha b)(\alpha h)^3\right)} = \Delta_0$$

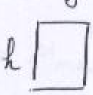
ثابت ← تغییر نمی کند

II

*** تیر ساده‌ای با مقطع مستطیلی تحت وزن خودش باشد چنانچه کلیه ابعاد تیر α برابر شود تنش حداکثر و حداکثر خیز چه تغییری می‌کند.

$w = \gamma b h$





$$\sigma_0 = \frac{M}{S} = \frac{\frac{\gamma b h \cdot l^2}{8}}{\frac{b h^2}{6}} = \frac{3\gamma l^2}{4h}$$

$$\frac{5(\gamma b h) l^4}{384 E \frac{1}{12} b h^3}$$

$$\sigma \text{ جدید} = \frac{\frac{\gamma(\alpha b)(\alpha h)(\alpha l)^2}{8}}{\frac{(\alpha b)(\alpha h)^2}{6}} = \frac{3\alpha\gamma l^2}{4h} =$$

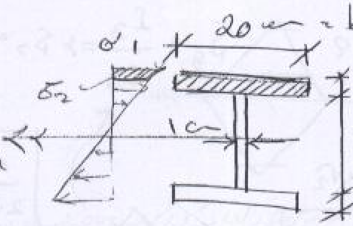
$$\frac{(\gamma(\alpha b)(\alpha h))(\alpha l)^4}{384 E \frac{1}{12}(\alpha b)(\alpha h)^3} = \alpha^2 \Delta_0$$

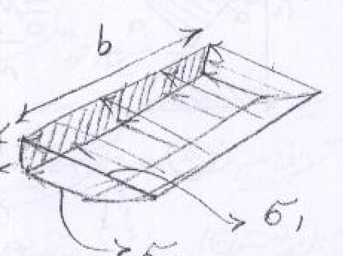
* α برابر تنش اولیه.

در بعضی اوقات نیروی تنشی از مقطع سوال شود

تعداد نیروی وارد بر بال فوقانی؟

$20\,cm = b$, $1\,cm = t$, $18\,cm$, $1\,cm$, $1\,cm = t$, $10\,t.m$, σ_1, σ_2





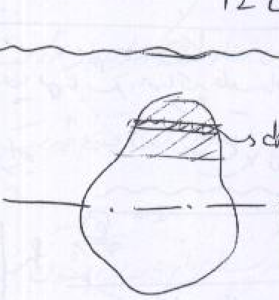
$$\boxed{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \times t \cdot b}$$

$$\left(\frac{\frac{Mc_1}{I} + \frac{Mc_2}{I}}{2}\right) bt = (c_1 + c_2)\frac{Mbt}{I} = \left(\frac{10+9}{2}\right)\frac{10\times10^5 \times 20 \times 1}{\frac{1}{12}\left[20\times20^3 - 19\times18^3\right]}$$

روش دوم :

$$F = \int \sigma \, dA$$

در سطح مورد نظر



dA

$$F = \int \frac{M \cdot Z}{I} dA = \frac{M}{I}\int Z \, dA$$

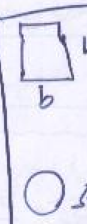
$$\boxed{F = \frac{M Q_0}{I}}$$

نسبت N.A

گشتاور سطح بالای N.A

$$Q = A \cdot e$$

$$F = \frac{10\times10^5 \times 20 \times 9.5}{\frac{1}{12}\left[20\times20^3 - 19\times18^3\right]} =$$



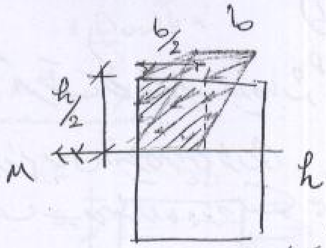
$I = \frac{bh^3}{12}$

$S = \frac{bh^2}{6}$

$I = \frac{\pi R^4}{4}$

$S = \frac{\pi R^3}{2R}$

(III)



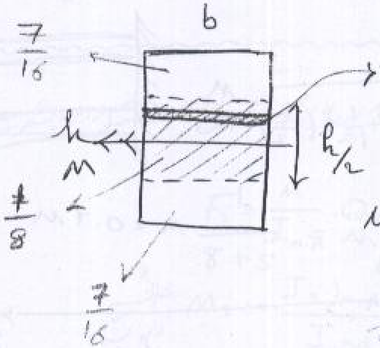
$$F=\frac{M.Q}{I}=\frac{M\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{4}\right)}{\frac{1}{12}bh^3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{M}{h}$$

روی دو تکه کوپل چون نیرو را به دست می‌دهد.

$$F\times\frac{2}{3}\times\frac{h}{2}\times 4=M \qquad \boxed{F=\frac{3}{4}\frac{M}{h}}$$

نسبت گشتاوری که ارتفاع $\frac{h}{2}$ وسطی تحمل می‌کند به M

چقدر است



$$M_1=\int \sigma.dA\,z$$

در سطح مورد نظر

$$M_1=\int\frac{M.z}{I}\times z.dA=\frac{M}{I}\int z^2dA$$

حول — در سطح مورد نظر

$$=\frac{M I_1}{I}$$

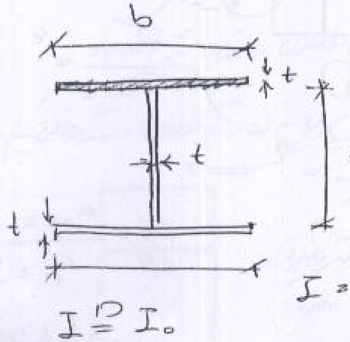
ممان اینرسی نسبت سطحی است که توزیع می‌شود.

$$\boxed{M_1=\frac{(I_1)_{NA}}{I}M}$$

نسبت به N.A کل مقطع

$$M_1=\frac{\frac{1}{12}(b)\left(\frac{h}{2}\right)^3}{\frac{1}{12}bh^3}M=\frac{1}{8}M$$

چه درصدی از ممان را بال‌ها تحمل می‌کنند. (t نازک)



$$M_1=\frac{bt\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2}{I}$$

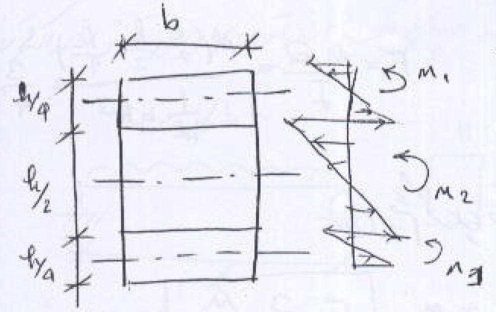
از $\frac{1}{12}bt^3$ بال به علت کوچک بودن t صرف نظر می‌کنیم

$$I=2\times bt\left(\frac{b}{2}\right)^2+\frac{1}{12}tb^3=\frac{7}{12}tb^3$$

$I \overset{?}{=} I_0$

$$M_1=\frac{bt\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\frac{7}{12}tb^3}=\frac{3}{7}M$$

(IV)

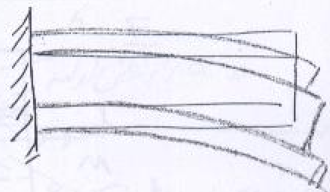


اگر سه تکه به هم چسبیده باشد؟

*** هر کدام سهمی از انرژی برای خودش حساب می‌شود و اندازه لنگر سختی توزیع می‌شود چون E ها یکسان است پس I ها ربط دارد I نسبت به تار خنثی هر مقطع برای خودش.

$$M_1 = \frac{I_1}{I} M$$

$$M_1 = \frac{I_1}{\sum I} M$$

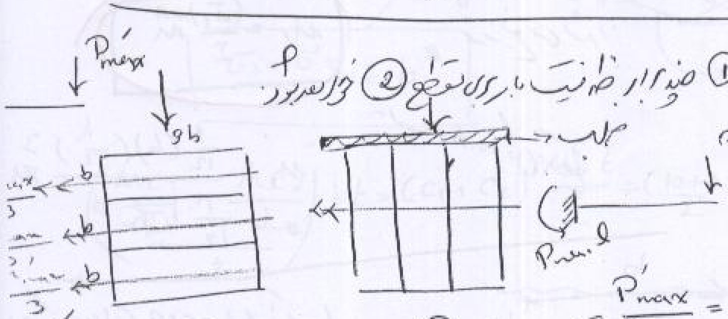


$$M_1 = \frac{\frac{1}{12} b \left(\frac{h}{4}\right)^3}{2\times\frac{1}{12} b\left(\frac{h}{4}\right)^3+\frac{1}{12} b\left(\frac{h}{2}\right)^3} M$$

$$M_2 = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3} M = \frac{1}{2+8} M = 0.1M$$

*** اگر جوش نشده باشد باز هم حالت پیوسته حل می‌کنیم

ظرفیت باربری مقطع ① چند برابر ظرفیت باربری مقطع ② خواهد بود.



$$\frac{P'_{max}}{P_{max}} = ?$$

* نکته: نسبت بارها نسبت ممان‌هاست. چون خمش با بار رابطه خطی دارد

$$\frac{M'}{M} = ? \Rightarrow$$

$$\sigma_{all} = \frac{\frac{M'_{max}}{3}}{3b\cdot\frac{b^2}{6}} \Rightarrow$$

$$M'_{max} = \frac{9}{6} b^3 \sigma_{all} = 1.5 b^3 \sigma_{all}$$

$$\sigma_{all} = \frac{M_{max}}{S = \frac{(3b)^3}{6}} =$$

$$M_{max\,(1)} = \frac{27}{6} b^3 \sigma_{all} = 4.5 b^3 \sigma_{all}$$

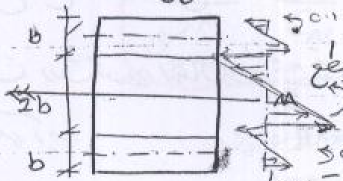
$$\frac{M_{max}}{M'_{max}} = 3$$

سه برابر در شرایط ارتجاعی

«مقاومت مصالح» (I) «با کد B»

۸۹/۱۱/۲

ب ـ خمش مقاطعی که اجزاء هم جنس و چسبیده داشته باشند:



$$M'_{\text{برای هر مقطع}} = \frac{I}{\sum I_0}\cdot M$$

جمع ممان اینرسی اجزاء حول خودشان

$$M'_{\text{مقطع وسط}} = \frac{\frac{1}{12}(3b)(2b)^3}{\frac{1}{12}(3b)(2b)^3+2\times\frac{1}{12}(3b)b^3}\cdot M = 0.8M$$

20٪ باقی مانده به 10٪ بالا و پایین تقسیم می‌شود.

*** اگر تعدادی مقطع روی هم قرار گیرند و خمش به جای اینکه ... باشد هر قطعه را ... جداگانه بررسی ... :

$$F_i = \frac{M}{I_{N.A}}\cdot Q_{N.A}$$

(هم جنس و چسبیده) $M_i = \frac{(I_i)_{N.A}}{I_{N.A}}\, M$

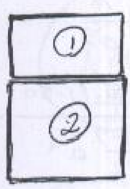
(مقاطع ناچسبیده) $M_i = \frac{(I_i)_0}{\sum I_0}\cdot M$

** مقاطع کامپوزیت: همین وضعیت ولی جنس‌ها متفاوت (مقاطع مرکب) «تحت خمش»

"Composite Section" منظور استفاده از مصالح با جنس‌های متفاوت در یک مقطع است. (مثلاً بتن و فولاد)

*** محاسبه توزیع ... بر اساس توزیع تنش‌ها باشد یعنی معادل کردن تنش‌ها ... باشد.

چون ابزار ... نمی‌توان از خصوصیات ... استفاده کرد به همین دلیل از مقطع معادل استفاده می‌کنیم یعنی مقطع را به ... معادل تبدیل کنیم.



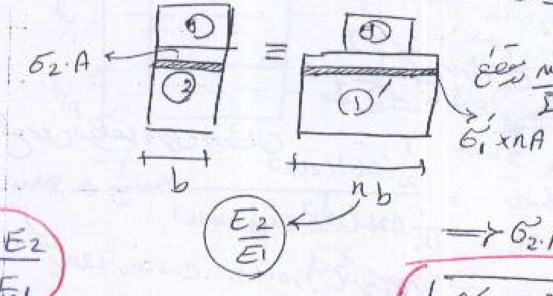
چون مقاطع تحت خمش کرنش‌ها خطی هستند پس ... ، تنش‌ها به E بستگی دارد.

از طرفی چون ... تنش ... برابر ... شکل است ... کرنش ... معادل تغییر شکل است و ... تنش ... باشد

پس می‌توانیم ارتفاع را تغییر ندهیم ... تنش ... را ... عرض ... .

II

نکات: ۱) ارتفاع مقطع اصلی با مقطع معادل یکسان است.



$n = \frac{E_2}{E_1}$

۲) تنش در قسمت دست نخورده از رابطه $\frac{Mc}{I}$ در مقطع معادل بدست می آید.

$\Longrightarrow \sigma_2 \cdot A = \sigma'_1 \times nA$

$$\boxed{\sigma_2 = n\sigma'_1}$$

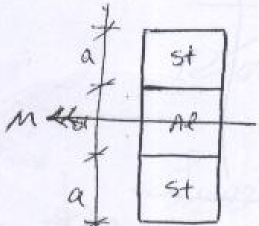
۳) تنش در قسمت تبدیل یافته برابر است با $\frac{nMc}{I}$

۴) کرنش در هر دو مقطع هم برابرند

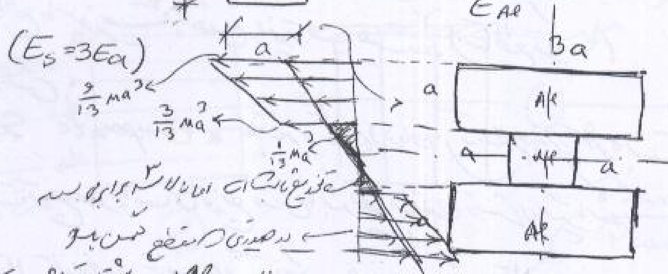
۵) نیروی وارده در هر قسمت نیز با هم برابر اند.

مثال: (اگر چسبیده باشند به هم):

مطلوبست محاسبه تنش حداکثر در فولاد و تنش حداکثر در آلومینیوم و توزیع تنش.



St ← Al تبدیل می کنیم: $n = \frac{E_{st}}{E_{Al}} = 3$



$I = \frac{1}{12}\left[(3a)^4 - 2a \cdot a^3\right]$

می $I = \frac{79}{12}a^4$

$\sigma^{Al}_{max} = \frac{M \cdot y}{I} = \frac{M(0.5a)}{\frac{79}{12}a^4} \simeq \frac{1}{13}\frac{M}{a^3}$

بیشترین تنش بستگی به فاصله از تار خنثی دارد Al متفاوت است چون در آلومینیوم قرار دارد

$\sigma^{st}_{max} = \frac{nM \cdot C}{I} = \frac{3 \cdot M \cdot (1.5a)}{\frac{79}{12}a^4} \simeq \frac{9}{13}\frac{M}{a^3}$

چون St ساده است در هم ... تنش آن n برابر شده پس باید n برابر شود

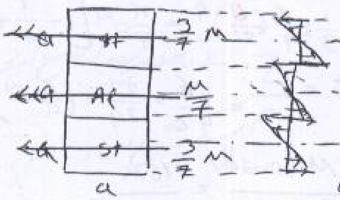
چون بسط ما n برابر شده تنش $\frac{1}{n}$ می شود.

III

$$\boxed{\frac{\sigma^{st}_{max}}{\sigma^{Al}_{max}} = \frac{C_{st}}{C_{Al}} \cdot \frac{E_{st}}{E_{Al}} = \frac{1.5a}{0.5a} \times 3 = 9}$$ نکته: ***

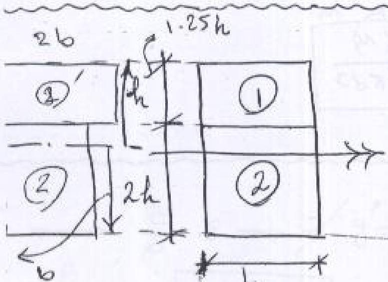
مشخص (ب): هم جنس نباشند: ممان بین اجزاء به نسبت EI توزیع می‌شود.

$$M_{st} = \frac{(EI)_{st}}{\sum EI} \cdot M = \frac{3EI}{3EI \times 2 + EI} \cdot M = \frac{3}{7}M$$



$$\sigma^{st}_{max} = \frac{M_{st}}{S_{st}} = \frac{\frac{3}{7}M}{\frac{a^3}{6}} = \frac{18}{7}\frac{M}{a^3}$$

$$\sigma^{Al}_{max} = \frac{M_{Al}}{S_{Al}} = \frac{\frac{M}{7}}{\frac{a^3}{6}} = \frac{6}{7}\frac{M}{a^3}$$



$$E_1 = 2E_2 \qquad \frac{\sigma_{t\,max}}{\sigma_{c\,max}} = ? = \frac{C_t}{C_c} \times \frac{E_t}{E_c} = \frac{C_t}{C_c} \times \frac{E_1}{E_2}$$

② ← ①

بنابر:

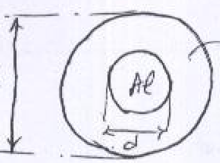
تار خنثی: $\Rightarrow \dfrac{2bh\cdot(2.5h) + 2bh\cdot h}{4bh} = \frac{7}{4}h = 1.75h$

$$\frac{\sigma_{t\,max}}{\sigma_{c\,max}} = \frac{1.25h}{1.75h} \times 2 = \frac{10}{7}$$

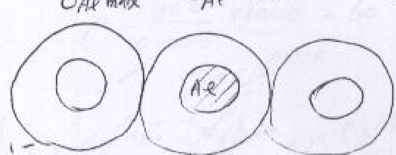
قطعا تبدیل $St \leftarrow AL$ و بالعکس باید n ها در جهتی که تبدیل می‌شود ضرب شود (ابعاد عمود بر محور خنثی)

$E_{st} = 3E_{Al}$

$\Rightarrow n = 3$



مثال: $\dfrac{\sigma_{st\,max}}{\sigma_{Al\,max}} = \dfrac{C_{st}}{C_{Al}} \times \dfrac{E_s}{E_a} = \dfrac{d}{0.5d} \times 3 = 6$ → نسبت



نیازی به شکل هم نیست
ممان اینرسی با برابری
خنثی را در n ضرب

$St \rightarrow Al$

مقطع معادل:

$$I = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^4 + 3\frac{\pi}{4}\left[d^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right] = \frac{\pi}{4}d^4\left[\frac{1}{16} + 3\left(1 - \frac{1}{16}\right)\right] = \frac{29\pi}{32}d^4$$

$\frac{46}{16} = \frac{23}{8}$

(IV)

$$\frac{M.C}{I} = \frac{M \times \overset{0.5d}{\frac{d}{2}}}{\frac{23\pi}{32} d^4} = \boxed{\frac{16}{23\pi}\frac{M}{d^3}} \qquad \frac{M.C}{I} : \sigma_{max}^{Al}$$

درونی

بیرونی $\sigma_{max}^{St} = \frac{n \cdot M \cdot C}{I} = \frac{3 \cdot M \times d}{\frac{23\pi}{32} d^4} = \boxed{\frac{96 M}{23\pi d^3}}$

$$n = \frac{E_{Al}}{E_{St}} = \frac{1}{3} \qquad Al \longrightarrow St :$$ تبدیل

~~[illegible]~~ $I = \underbrace{\frac{\pi}{4}\left[d^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right]}_{\text{[illegible]}} + \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{4} d^4 \left[1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{16}\right]$

$$= \frac{46}{48} = \frac{23}{24} \times \left(\frac{\pi}{4} d^4\right) = \frac{23\pi}{96} d^4$$

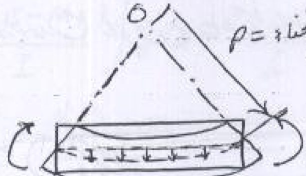
$$\sigma_{max}^{Al} = \frac{n \cdot M \cdot C}{I} = \frac{\frac{1}{3} \times M (0.5d)}{\frac{23\pi}{96} d^4} = \frac{16 M}{23\pi d^3}$$

$$\sigma_{max}^{St} = \frac{M \cdot C}{I} = \frac{M \times d}{\frac{23\pi}{96} d^4} = \boxed{\frac{96 M}{23\pi d^3}}$$

«مقاومت مصالح»

86/11/6 (I)

- انحناء و شعاع انحناء : ρ = شعاع انحناء = فاصله بین مرکز انحناء از محور خنثی



$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3}} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\frac{Z}{\rho} = \varepsilon$$

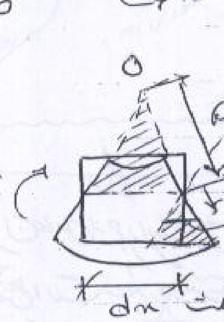
Z ← فاصله هر نقطه از سطح محور خنثی

ε ← کرنش هر نقطه

ρ ← شعاع انحناء

***

اثبات :



$\frac{\delta}{dx} = \frac{Z}{\rho}$: تشابه مثلث

$$\boxed{\varepsilon = \frac{Z}{\rho}}$$

$$\Longrightarrow \frac{Z}{\rho} = \varepsilon \Longrightarrow \cancel{Z} \cdot y'' = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M\cancel{Z}}{EI}$$

$$\boxed{y'' = \frac{M}{EI}}$$ ← معادله دیفرانسیل ***

مثال : ($\frac{69}{85}$) در بالا و...

$\varepsilon_t = 0.002$

$\varepsilon_b = 0.003$

$\rho = ?$, $h = 300\ mm$

$$\varepsilon_t = \frac{Z_t}{\rho} \Rightarrow 0.002 = \frac{Z_t}{\rho}$$

$$\varepsilon_b = \frac{Z_b}{\rho} \Rightarrow 0.003 = \frac{Z_b}{\rho}$$

$$Z_t + Z_b = 300 \Rightarrow 0.002\rho + 0.003\rho = 300$$

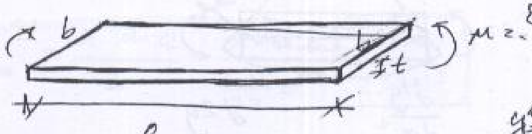
$$\rho = \frac{300}{0.005} \times \frac{1}{1000} = 60$$

تبدیل به متر ← mm

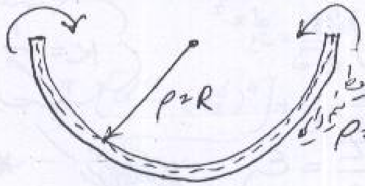
در بالا و پایین مقطع کرنش‌ها به ترتیب 0.002 و 0.003 است. ارتفاع مقطع برابر 300mm باشد، شعاع انحنا ρ

II

مثال: میله‌ای (تسمه) به طول l داریم. می‌خواهیم با دو سر آن، لنگر لازم برای تبدیل این تسمه به یک نیم دایره چقدر است؟



$$y'' = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$



محیط $\pi R = l$

شعاع انحنا $\rho = R = \frac{l}{\pi}$

$$\frac{\pi}{l} = \frac{M}{EI}$$

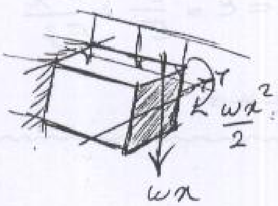
$$M = \frac{\pi E I}{l} = \frac{\pi E \frac{1}{12} b t^3}{l}$$

$$\boxed{M = \frac{\pi E b t^3}{12 l}}$$

- برش: Shear force

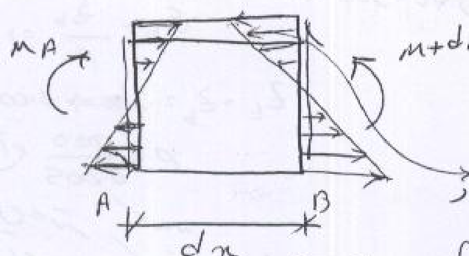
$\frac{dM}{dx} = V \Longrightarrow$ تغییر لنگر عامل به وجود آمدن برش است. بطوری‌که اگر در طولی از سازه لنگر تغییر نکند، در طول آن برش صفر است.

** معادلات مستقل از هم نیستند، وابسته به هم هستند.



بردار برش و بردار خمشی بر هم عمودند.
برش در صفحه بردار خمشی گسترده است.

- تئوری برش:

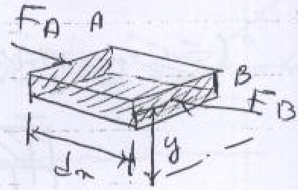


$$dF = F_B - F_A = \int_{B \text{ در صفحه}} \sigma_B \, dA - \int_{A \text{ در صفحه}} \sigma_A \, dA$$

$$dF = \int \frac{M_B \cdot y}{I} dA - \int \frac{M_A \cdot y}{I} dA$$

III

$$dF = \frac{(M_B - M_A)}{I}\int y\,dA = \frac{dM \cdot Q}{I}$$



$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = \frac{\frac{dM}{dx}\cdot Q}{I} = \frac{VQ}{I} = q$$

جریان برش

جریان برش $\boxed{q = \frac{V\cdot Q}{I}}$

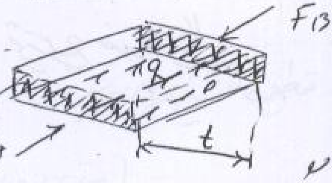
جریان از این سطح مورد نظر

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{V\cdot Q}{I\cdot t}$$

تنش متوسط مقطع

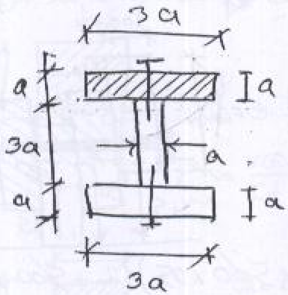
عرض سطح مورد نظر

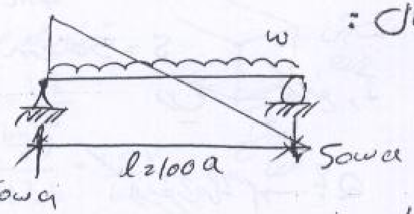
جریان برشی به صورت تنش برشی بوجود می‌آید.



اگر q را در امتداد طول تیر یکنواخت توزیع شود در عرض (t) تنش برشی متوسط بدست می‌آید

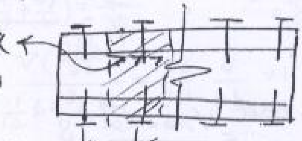
مثال:





فاصله بین پیچ‌ها:

$S = 10a$



spacing $= S = 10a$

۱- V_{max} را بدست می‌آوریم: $\underline{50wa}$

۲- هر پیچ برشی باید برابر هر واحد ... پیچ ... اضافی است ... S.

$$\boxed{q \times S = F^{stud}}$$

حداکثر نیروی وارده به پیچ چقدر است؟ $F^{stud}_{max} = ?$ → Shear link

$$\frac{V_{max}\cdot Q}{I}\cdot S = F^{stud}_{max}$$

$$F^{stud}_{max} = \frac{50wa \cdot 6a^3}{17.75a^4}\cdot 10a = \frac{3000}{17.75}wa = 169wa$$

$$I = \frac{1}{12}\left[3a(5a)^3 - 2a(3a)^3\right] = \frac{213}{12}a^4 = \frac{71}{4}a^4 \simeq 18a^4$$

$17.75a^4$ دقیق

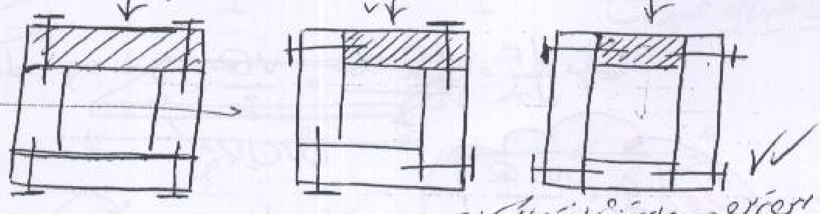
$$Q = 3a^2(2a) = 6a^3$$

تنش در stud:

$$\tau^{stud} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4}d^2}$$

IV

مثال: تحت برش تا تیر در کدام حالت نیروی که تیر را به هم وصل می‌شود. (در کدام حالت پیچ کمتری می‌خواهیم یا فاصله بیشتر است)



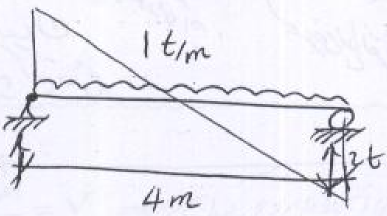
بحرانی‌ترین

این ترتیب سه برای تنش افقی بحرانی است.

تیر ترین ... مورد بحث ما

چون V و I در هر سه یکسان است و فقط Q متغیر خواهد بود، هر کدام کمتر باشد. پیچ آن کمتر است از جهت Q بستگی دارد.

مثال: حداکثر نیروی وارده به پیچ؟ با فرض اینکه ممان اینرسی مقطع I باشد.

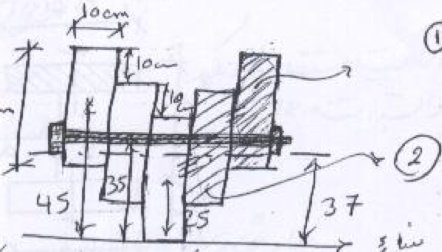


$V_{max} = 2t$

$S = 50\ cm$

I, در کل مقطع → ثابت

Q؟ → در سطح شکاف خواهیم



$$\bar{y} = \frac{(5\cancel{0}0\times 45 + 5\cancel{0}0\times 25)\times 2 + \cancel{5}00\times 25}{5\times 5\cancel{0}0} = \frac{185}{5} = 37_{cm}$$

$$F^{bolt}_{max} = \frac{V_{max}\cdot Q}{I}\cdot S$$

در واقع ما به دنبال حداکثر Q است چون دو حالت فقط داریم یا اول بست آن پیچ ... یا باقی ... مثل مقطع یا ... تبصره: حالتی چون ... و ... را دارد مثل همین حالت می‌شود.

$$①: Q = 500(\underset{8}{45 - 37}) = 4000\ cm^3$$

$$② \quad Q = 4000 + 500(\underset{-2}{35 - 37})$$

$$Q = 3000\ cm^3$$

حالت ① ماکسیمم بحرانی‌تر است.

$$F^{bolt}_{max} = \frac{2000_{kg}\cdot 4000\times 50}{I} = \frac{4\times 10^8}{I}\ kg$$

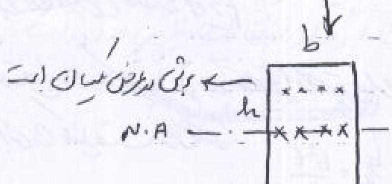
V

*** نکته : Q هر قسمت از مقطع برابر قرینه Q باقی مانده آن مقطع است.

I

86/11/8

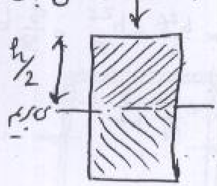
«محاسبه تنش برشی»



مقطع را تقسیم بندی می کنیم:

انواع مقاطع:
- توپر (ارضالی)
- جدار نازک باز
- جدار نازک بسته

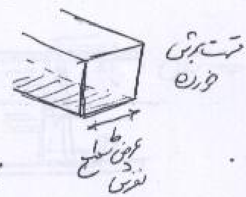
برای محاسبه تنش برشی در مقاطع توپر موازی محور خنثی برش می زنیم و محاسبه می کنیم چون توزیع در عرض یکسان است. (موازی محور خنثی برش می زنیم)



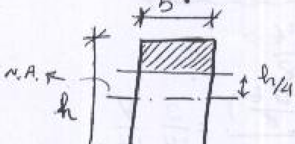
تنش در محور خنثی:

$$Q = b\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

$$\tau_{N.A.} = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{bh^2}{8}\right)}{\frac{1}{12}bh^3\times b} = \frac{1.5V}{bh}$$

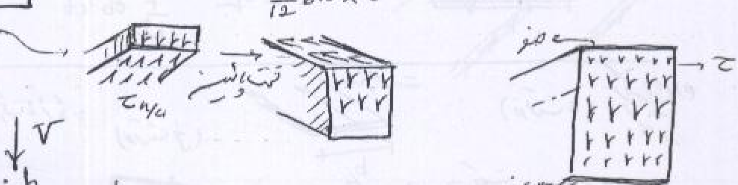


تنش در فاصله $y = h/4$:

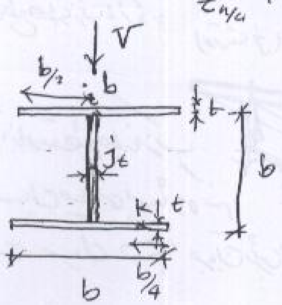


$$Q = b\cdot\frac{h}{4}\left(\frac{h}{8}+\frac{h}{4}\right) = \frac{3bh^2}{32}$$

$$\tau_{(h/4)} = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{3bh^2}{32}\right)}{\frac{1}{12}bh^3\times b} = \frac{36}{32}\cdot\frac{V}{bh} = 1.125\frac{V}{bh}$$



- مقطع جدار نازک باز:



$\tau_i = ?$

$\tau_j = ?$

$\tau_k = ?$

تنش برشی در نقاط i و j و k :

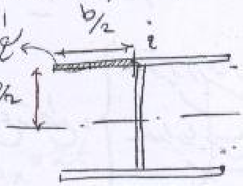
II

برای محاسبه $I_{N.A}$ چون جدار نازک است برای بالا و پایین از عبارت $(\frac{1}{12}bt^3)$ صرف نظر می‌کنیم.

$$I_{N.A.} = bt\left(\frac{b}{2}\right)^2 \times 2 + \frac{1}{12}tb^3 = \boxed{\frac{7}{12}tb^3}$$

*** نکته: در مقاطع جدار نازک به علت نازک بودن جداره یکنواخت بودن تنش را در عرض جداره فرض می‌کنیم پس تنش برشی را در عرض جداره ثابت می‌گیریم:

در مقاطع جدار نازک (صرفا بار دو جسته) در جهت جداره برش می‌گیریم زیرا به علت نازک بودن جداره می‌توان تنش برشی را یکنواخت فرض کرد.

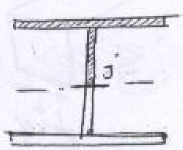


$$Q_i = \frac{b}{2} \times t \times \frac{b}{2} = \frac{b^2t}{4}$$

$$\tau_i = \frac{VQ_i}{It_i} = \frac{V\left(\frac{b^2t}{4}\right)}{\frac{7}{12}tb^3 \times t} = \frac{3}{7}\frac{V}{bt}$$

به عرض سطح برشی

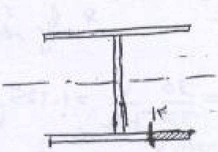
$$Q_j = bt\frac{b}{2} + \frac{b}{2}t\frac{b}{4} = \frac{b^2t}{2} + \frac{b^2t}{8} = \frac{5}{8}b^2t$$



$$\tau_j = \frac{VQ_j}{It_j} = \frac{V\left(\frac{5}{8}b^2t\right)}{\frac{7}{12}tb^3 \times t} = \frac{15}{14}\frac{V}{bt}$$

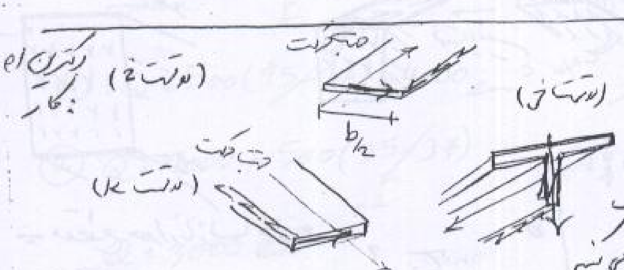
$\frac{5}{8} \times \frac{12}{7}$

$$Q_k = \frac{b}{4}t \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2t}{8}$$

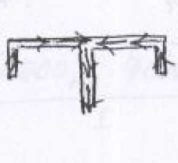


$$\tau_j = \frac{VQ_k}{It_k} = \frac{V\left(\frac{b^2t}{8}\right)}{\frac{7}{12}tb^3 \times t} = \frac{3}{14}\frac{V}{bt}$$

جهت تنش برشی در مقاطع جدار نازک:



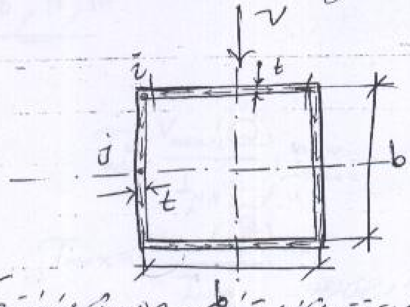
*** نکته: از آنجایی که کل این مقاطع جدار نازک را بر یک سیال خیالی می‌پنداریم «تنش» جهت حرکت سیال همان جهت جریان برش است:



Behrouz Yarizadeh

بهروز

III

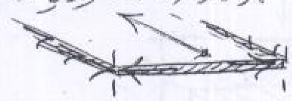


- «مقطع جدار نازک بسته»:

$$I = bt\left(\frac{b}{2}\right)^2 \times 2 + 2 \times \frac{1}{12} \times t \times b^3 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)tb^3$$

$$= \frac{2}{3}tb^3$$

*** در این حالت اگر بخواهیم حساب کنیم باید برش بزنیم تا از دو طرف قرینه آن که هم این که رشته بسته شده را البته بسته. محور تقارن سازه‌ای است که در آن بردار و تنش برشی صفر است.



جای که قرینه آن تنش برابر است.

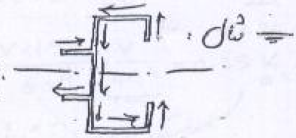
$$Q_i = bt \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{2}b^2t$$

$$\tau_i = \frac{V \cdot Q_i}{I t_i} = \frac{V\left(\frac{1}{2}b^2t\right)}{\frac{2}{3}tb^3 \times (2t)} = \frac{3}{8} \cdot \frac{V}{bt}$$

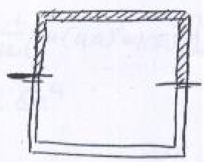
عرض سطح افقی از دو طرف داریم. $(2t)$

*** نکته: در مقاطع جدار بسته سیولها از محل تقارن می‌گیریم جهت حرکت سیال جهت برش است.

- مثال:

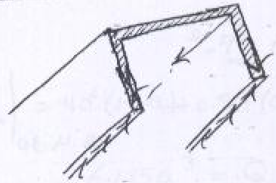


«قرینه»



$$Q_j = bt \cdot \frac{b}{2} + \frac{b}{2}t\frac{b}{4} \times 2 = \frac{3}{4}b^2t$$

$$\tau_i = \frac{V \cdot Q_j}{I t_j} = \frac{V\left(\frac{3}{4}b^2t\right)}{\frac{2}{3}tb^3 \times (2t)} = \frac{9}{16} \cdot \frac{V}{bt}$$



86/11/10 (I)

«مقاومت مصالح»

«تنش برشی حداکثر»

*** توزیع تنش:

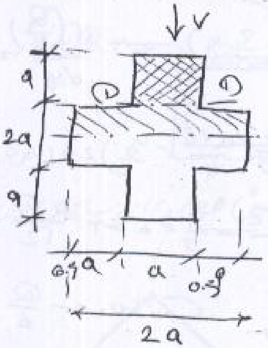
$$\tau_{max} = \frac{V_{max} \cdot \left(\frac{Q}{t}\right)}{I_{N.A}} \rightarrow max$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}\left(\frac{Q}{t}\right)_{max}}{I_{N.A}}$$

- اگر در مقطع t ثابت باشد τ_{max} در N.A رخ می‌دهد.

(در غیر این صورت باید بررسی شود کی Q ← max می‌شود)

مثال: تنش برشی حداکثر تحت برش حاکم (V)؟



چون ضخامت تغییر می‌کند باید در مقاطع ① و ② بررسی کرد که $\frac{Q}{t}$ ← max می‌شود

$$1-1: \left(\frac{Q}{t}\right)_1 = \frac{Q_1}{t_1} = \frac{a^2(1.5a)}{a} = 1.5a^2$$

$$\left(\frac{Q}{t}\right)_2 = \frac{Q_2}{t_2} = \frac{a^2(1.5a) + 2a^2(0.5a)}{2a} = 1.25a^2$$

$$I_{N.A} = \frac{1}{12}\left[a(4a)^3 + a(2a)^3\right] = 6a^4$$

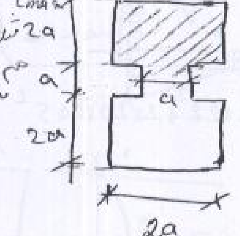
$$\tau_{max} = \frac{V\left(\frac{Q}{t}\right)_{max}}{I} = \frac{V \times 1.5a^2}{6a^4} = \frac{V}{4a^2} = 0.25\frac{V}{a^2}$$

در مقطع 1-1 ← تنش برشی max می‌شود.

در حالی که تنش در محور خنثی برابر است:

$$\tau_{N.A} = \frac{V(1.25a^2)}{6a^4} = 0.21\frac{V}{a^2}$$

مثال: $\tau_{max} = ?$



تنش در تار خنثی رخ می‌دهد چون Q_{max} است و هم t min است.

$$\left(\frac{Q}{t}\right)_{max}\Big|_{at\ N.A} = 4a^2(1.5a) + 0.5a^2(0.25a) = 6.125a^3 = Q$$

$$\frac{Q}{t} = \frac{6.125a^3}{a} = 6.125a^2$$

$$I_{N.A} = \frac{1}{12}\left[2a(5a)^3 - a^4\right] = \frac{249}{12}a^4 = 20.75a^4$$

$$\tau_{max}\Big|_{at\ N.A} = \frac{V(6.125a^2)}{20.75a^4}$$

II

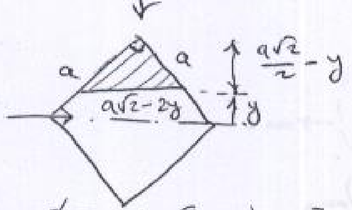
مثال: $\tau_{max} = ?$

چون t در حال تغییر است

می‌دانیم که $\frac{Q}{t} \leftarrow \tau_{max}$ است

به این [illegible]

Q/t ← [illegible]



$$\left(\frac{Q}{t}\right) = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - y\right)^2 \left[\frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - y\right) + y\right]}{a\sqrt{2} - 2y = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - y\right)}$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{6} + \frac{2}{3}y\right) \Rightarrow \frac{d\left(\frac{Q}{t}\right)}{dy} = 0$$

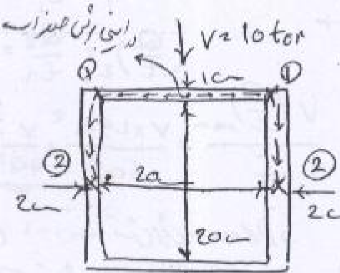
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{6} + \frac{2}{3}y\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{y}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{a\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{B}y + \frac{a\sqrt{2}}{6} - \frac{y}{3} = 0 \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{12} = \frac{2}{3}y \rightarrow \boxed{y = \frac{a\sqrt{2}}{8}}$$

در این ارتفاع $\frac{Q}{t} \leftarrow max$ است.

مثال: [illegible]

[illegible]



$$\left(\frac{Q}{t}\right)_1 = \frac{20 \times 10.5}{2} = 105 \ cm^2$$

$$\left(\frac{Q}{t}\right)_2 = \frac{20 \times 10.5 + 41 \times 2 \times 2 \times 5.5}{4} = \frac{210 + 900}{4}$$

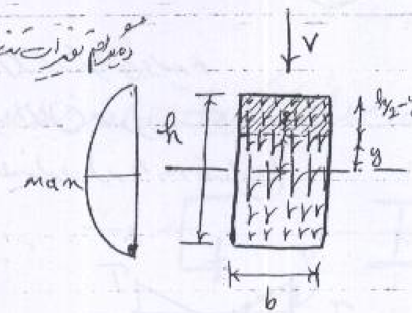
$$= 52.5 + 60.5 = 113 \ cm^2$$

$$\tau_{max}\Big|_{at\ N.A} = \frac{V \cdot \left(\frac{Q}{t}\right)_{max}}{I} = \frac{10{,}000 \times 113}{I} = \frac{11.3 \times 10^5}{I}$$

$$I = \frac{1}{12}\left[24(22)^3 - 20^4\right] \simeq 2 \times \frac{1}{12} \times 2 \times 22^3 + 2 \times 20 \times 10.5^2$$

توزیع تنش برشی :

دیاگرام تغییرات تنش



$$Q=b\left(\frac{h}{2}-y\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-y\right)+y\right]$$

$$Q=b\left(\frac{h}{2}-y\right)\times\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right)$$

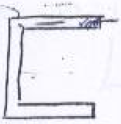
$$Q=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

$$\tau=\frac{V.Q}{I.t}=\frac{V.\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)}{\frac{1}{12}bh^3\,b}=\frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

سهمی (2)

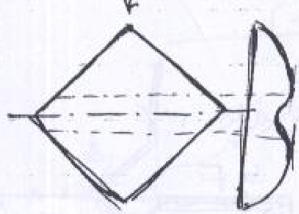
در بال: Q تغییر می‌کند $A\bar{y} \to t\times h\times\bar{y}$

خطی (1) تغییر می‌کند

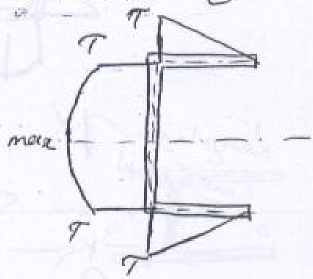


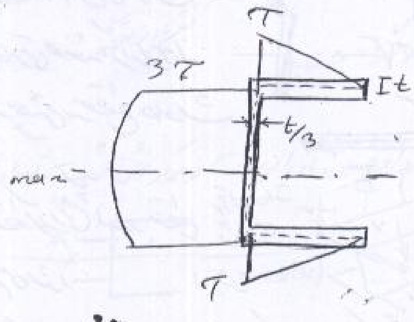
Q تغییر می‌کند $A\bar{y} \to t\times \underbrace{y\times\bar{y}}_{y^2}$

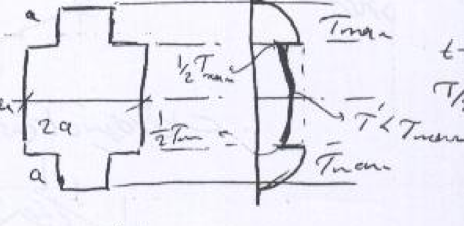
برای المان‌های موازی محور خنثی در مقطع توزیع تنش خطی و برای سایرین توزیع سهمی باشد



معمولا بدین ترتیب توزیع را روی A_{xe} نشان می‌دهند





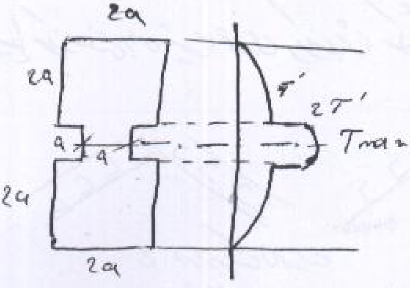


$t \to 2$ برابر

$\tau/2$

**

توزیع تنش

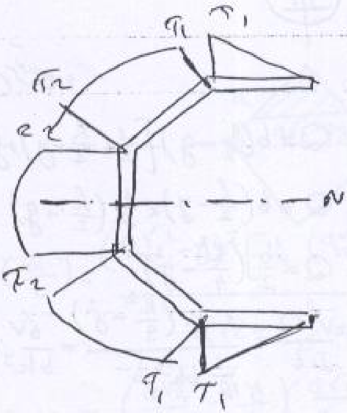


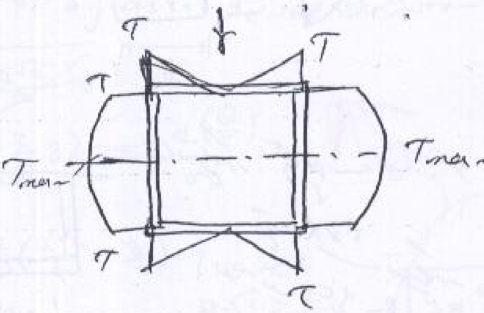
**

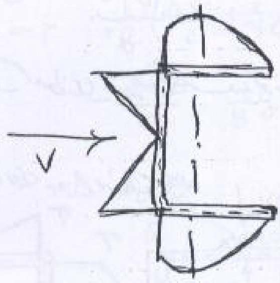
توزیع تنش

IV

نکته: تا جایی که به تار خنثی نرسیده‌ایم
اکسترمم‌هایمان صعودی است
و قله ندارد (در N.A قله داریم)

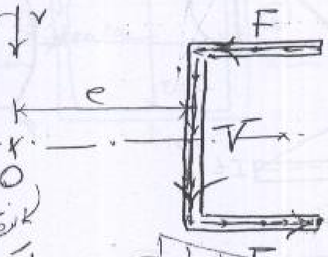






*** مرکز برش:
Shear Center

V باید از این نقطه بگذرد تا نپیچد.



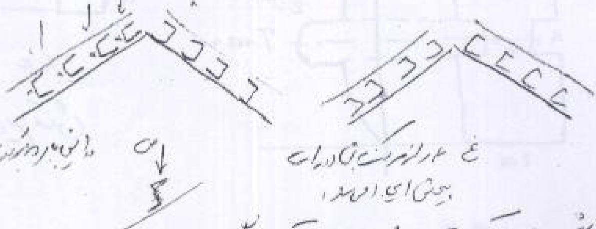
O: نقطه‌ای که اگر گشتاور نیروهای حاصل از آن بگیریم گشتاور نسبت به آن نقطه صفر می‌شود

بهترین حالت بارگذاری (اثر پیچش و خمش ندارد)

مرکز برش نقطه‌ای است که اگر برش از آن نقطه بگذرد (به عبارتی صفحه بارگذاری از آن نقطه بگذرد) پیچش در مقطع حادث نشود.

در واقع اگر V از نقطه مرکز برش نگذرد مقطع دچار پیچش هم می‌شود.

*** در واقع مرکز سطح مرکز سختی برای نیروی محوری و مرکز برش مرکز سختی برای نیروی برشی است.



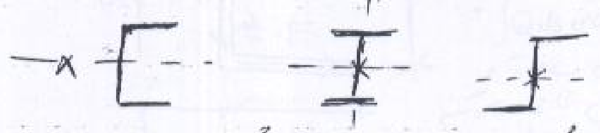
با این بارگذاری نیز پیچش داریم

اگر بار از مرکز برش نگذرد پیچش ایجاد می‌شود

اگر نیرو از مرکز برش نگذرد پیچش ایجاد می‌شود که تنش برشی ناشی از آن گاهی 40 تا 50 برابر تنش برشی حاصل از خمش است.

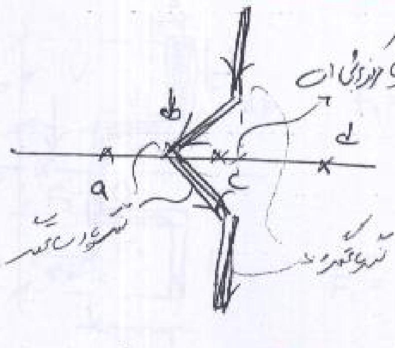
تعیین مرکز برش:

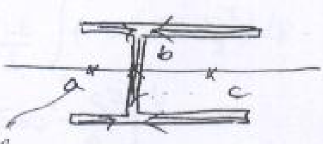
۱- مرکز برش روی محور تقارن است. بنابراین اگر مقطع دو محور تقارن داشته باشد مرکز برش همان مرکز تقارن می‌باشد.



۲- اگر مقطعی دارای اجزای متقاطع در یک نقطه باشد نقطه تقاطع مرکز برش است.

۳- (در حالت کلی) با استفاده از توزیع تنش نقطه‌ای را پیدا می‌کنیم که لنگر حول آن صفر باشد
با استفاده از استاتیک تعیین می‌کنیم.





چون تاثیر بال‌ها زیادتر است
(در واقع در پادساعتگرد است و مرکز برش شیب پادساعتگرد است)

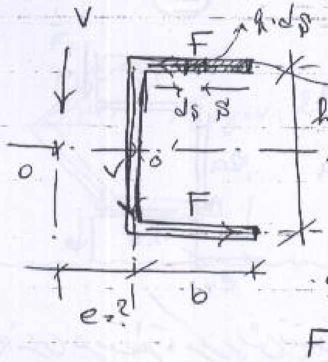
86, 11, 13

(I)

«مقاومت مصالح»

تعیین مرکز برش :

?



نیروی q.ds را به
حول نقطه o
این نقطه
پس مجموع $\int Q\,ds$
از انتگرال ... و
Q آن را محاسبه کنیم.

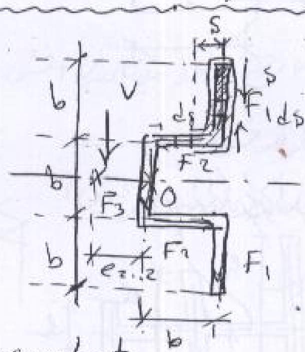
$$F = \int_0^b q\cdot ds = \int \frac{V.Q}{I}ds = \frac{V}{I}\int Q\,ds$$

$$F = \frac{V}{I}\int_0^b S.t.\frac{h}{2}.ds = \frac{V.h.t}{2I}.\frac{b^2}{2} = \frac{V.h.b^2t}{4I}$$

ممان حول نقطه o =

$$F.h = V.e \rightarrow \frac{V.h\,b^2t}{4I}.h = V.e$$

$$\boxed{e = \frac{h^2.b^2.t}{4I}}$$



t = Constant

$$F_1 = \int q\,ds = \int_0^b \frac{V.S.t(1.5b - \frac{S}{2})ds}{I} =$$

$$\frac{V.t}{I}\int_0^b (1.5b.S - \frac{S^2}{2})ds$$

$$F_1 = \frac{Vt}{I}\left[0.75bS^2 - \frac{S^3}{6}\right]_0^b$$

$$= \frac{Vtb^3}{I}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{12}\frac{Vtb^3}{I}$$

*** در اینجا نیازی به F_3 نداریم
چون به o راه دارد
از نظر فواصل نیز $\sum F_y$ باید
V بشود پس F_3 محاسبه نمی‌کنیم

$$F_2 = \int q\,ds = \int \frac{VQ}{I}ds = \frac{V}{I}\int_0^b (b.t.b + St\frac{b}{2})ds =$$

$$= \frac{V}{I}\left[b^3t + \frac{b^3t}{4}\right] = \frac{5}{4}\frac{Vtb^3}{I}$$

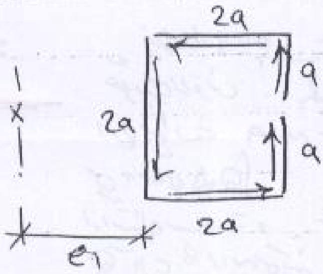
$$\sum T_o = V.e \rightarrow 2F_1.b - F_2\,b = V.e$$

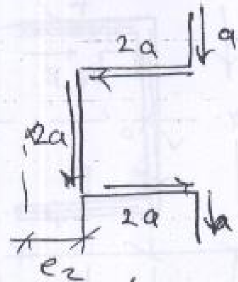
$$\frac{7}{6}\frac{Vtb^4}{I} - \frac{5}{4}\frac{Vtb^4}{I} = V.e$$

$$e = \frac{28 - 30}{24}\frac{b^4t}{I} = \frac{-1}{12}\frac{b^4t}{I}$$

* که در واقع e اشتباه به دست آمده
*** اما چون جهت عبارت V.e ندارم تو انتها استفاده کنیم که در واقع $\frac{1}{12}\frac{b^4t}{I}$ را ...

II





$e_1 < e_2$

$e_1 > e_2$

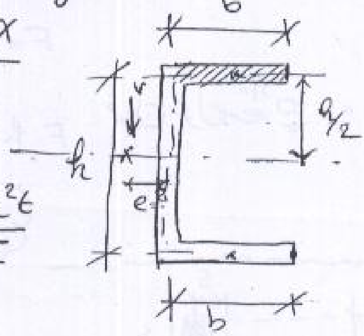
$e_1 = e_2$

نامشخص

فرمول تستی : ممان اینرسی هر مقطع تا مرکز برش تقسیم بر کل ممان اینرسی از تقسیمات نازک را ضرب تقسیم کنیم :

حول محور تقارن

$$X = \frac{\sum I_x \cdot x}{\sum I_x}$$



Ad^2

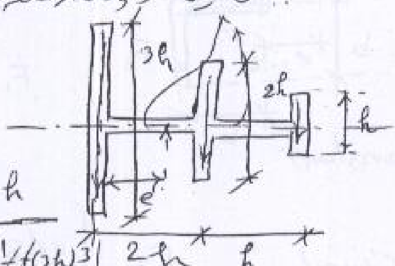
$$e = \frac{bt \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot \frac{b}{2} \times 2}{I} = \frac{b^2 h^2 t}{4I}$$

فاصله مرکز ثقل تا مبدا مختصات

فقط محوری

چون فاصله ای که تا مرکز مبدا مختصات نوشته ایم.

حال اینرسی ها را که داریم در فاصله ضرب تقسیم کنیم



$$e = \frac{\sum I \cdot \bar{x}}{\sum I}$$

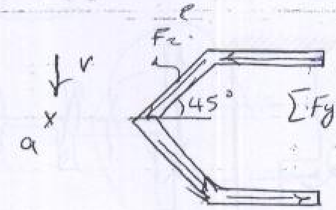
$$e = \frac{\frac{1}{12} t h^3 \cdot 3h + \frac{1}{12} t (2h)^3 \cdot 2h}{\frac{1}{12} t h^3 + \frac{1}{12} t (2h)^3 + \frac{1}{12} t (3h)^3}$$

ساده

$$e = \frac{3+16}{1+8+27} h = \frac{19}{36} h$$

مریم پیدا

III

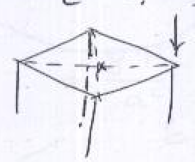


$\sum F_y = V:\ 2F \times \frac{\sqrt{2}}{2} = V \rightarrow \boxed{F = 0.7V}$

- تنش‌های مرکب: ?

Compound Stresses

*** دلیل اینکه ما اجازه داریم از اصل قابلیت استفاده نیرو استفاده کنیم سختی صلبیت نسبی مقطع و فرض عدم انحراف در مقطع.



اگر نیرو از مرکز سطح عبور نکند می‌توان آن را انتقال داد و در عوض خمش را هم انتقال می‌دهیم و برای برش، پیچش را انتقال می‌دهیم و از سر و پوشش آن استفاده می‌کنیم.

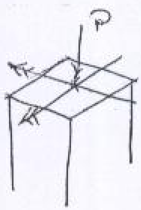
حالات تنش‌های مرکب:

1- نیروی محوری خارج از مرکز (نیروی محوری + خمش)

2- خمش کج (دو خمش)

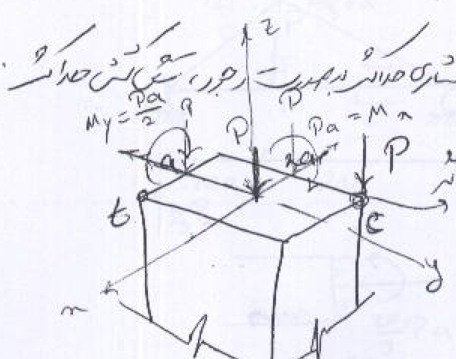
3- برش خارج از مرکز (برش + پیچش)

4- بارگذاری مرکب



1- نیروی محوری خارج از مرکز:

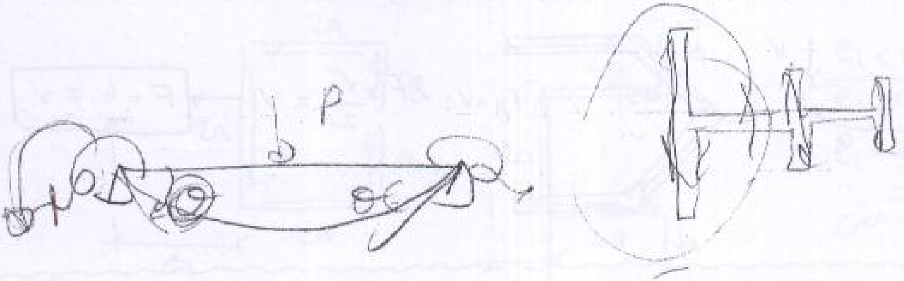
مطلوب است محاسبه تنش فشاری حداکثر در جهت ... و تنش کششی حداکثر.



$$\sigma_{c_{max}}\Big|_{at\ c} = \frac{-P}{2a^2} - \frac{M}{\frac{a(2a)}{6}} - \frac{P\frac{a}{2}}{\frac{2a\cdot a^2}{6}} = \frac{-3.5P}{a^2}$$

$$\sigma_{t_{max}}\Big|_{at\ T} = \frac{-P}{2a^2} + \frac{1.5P}{a^2} + \frac{1.5P}{a^2} = 2.5\,P/a^2$$

IV



$M_{ab} = M$

$$\frac{2EI}{l}(2\theta - \theta) + \frac{Pl}{8} = \frac{-EI}{l}\theta$$

$$\frac{2EI}{l}(-2\theta + \theta) + \frac{Pl}{8}, \frac{+EI}{l}\theta$$

$\theta =$

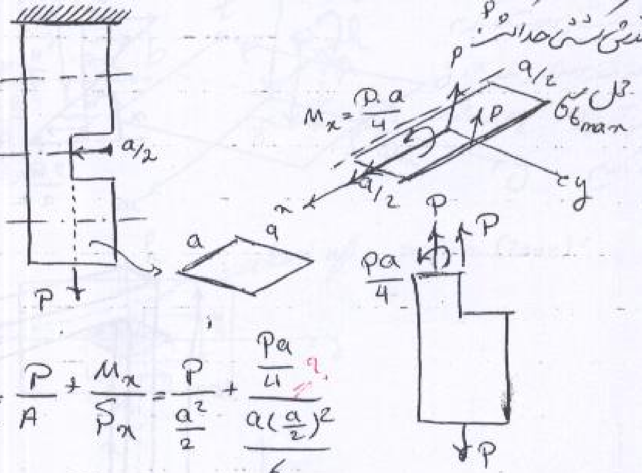
$-K\theta$

86/11/15

I

«مقاومت مصالح»

تنش کششی حداکثر؟



$$\sigma_{t_{max}} = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{S_x} = \frac{P}{\frac{a^2}{2}} + \frac{\frac{Pa}{4}}{\frac{a(\frac{a}{2})^2}{6}}$$

$$= \frac{8P}{a^2}$$

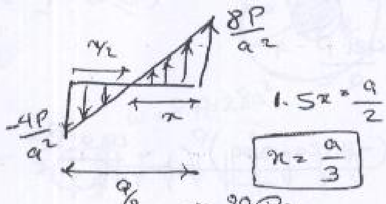
در صورت وجود تنش فشاری تنش فشاری (حداکثر) چقدر است؟

- چون توان ممان $\frac{P.a}{4}$ بیشتر از P است فشاری در تار بالایی بوجود می‌آید:

$$\sigma_{c_{max}} = (2-6)\frac{P}{a^2} = -\frac{4P}{a^2}$$

موقعیت تار خنثی؟ ← در حالت خالص تار خنثی از مرکز سطح عبور می‌کند

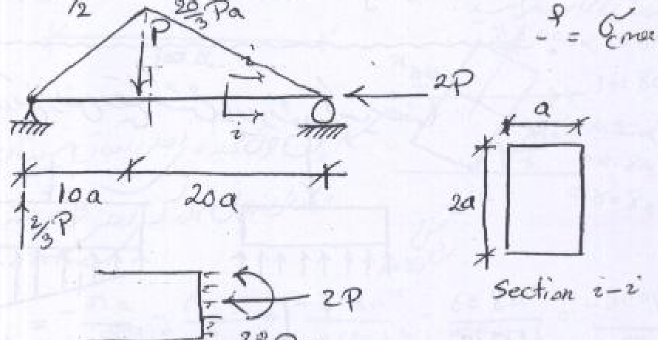
ولی در اینجا باید محاسبه کنیم.



$$1.5x = \frac{a}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{a}{3}}$$

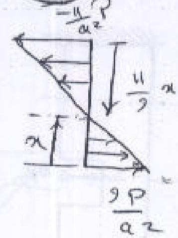
$? = \sigma_{c_{max}}$



$$\sigma_{c_{max}} = \frac{-2P}{2a^2} - \frac{\frac{20}{3}Pa}{\frac{a(2a)^2}{6}} = -(1+10)\frac{P}{a^2} = \frac{-11P}{a^2}$$

چون نیروی محوری فشاری است کشش کم می‌شود $\sigma_{t_{max}} = (-1+10)\frac{P}{a^2} = \frac{9P}{a^2}$

II

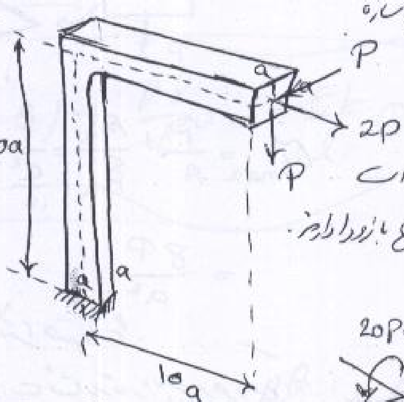


موقعیت تار خنثی:

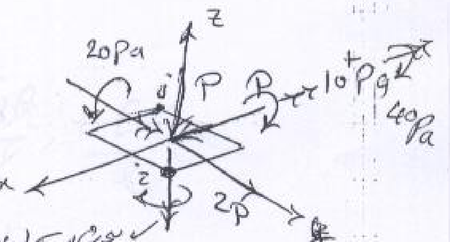
$\frac{11}{9}x + x = 2a$

$\frac{20}{9}x = 2a \Rightarrow \boxed{x = 0.9a}$

تنش‌های حداکثر در این سازه
حساب کنید.



مقطع بحرانی در تکیه‌گاه است
چون نیرو گشتاورها بیشترین بازو را دارند.



پیچش هم است (اما چون تنش نرمال
تولید نمی‌کند صرف نظر می‌کنیم)

$\sigma_{c\,max}\Big|_{at\ i} = \frac{-P}{a^2} - \frac{50Pa}{\frac{a^3}{6}} - \frac{20Pa}{\frac{a^3}{6}}$

$= -(1+120+300)\frac{P}{a^2}$

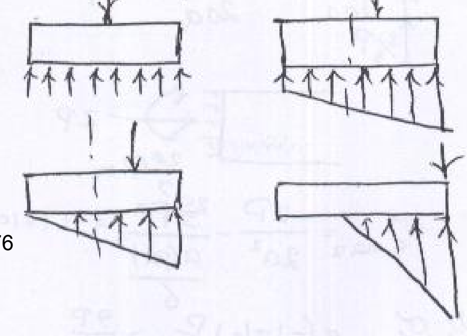
$= -\frac{421P}{a^2}$

$\sigma_{t\,max}\Big|_{at\ j} = (-1+120+300)\frac{P}{a^2} = \frac{419P}{a^2}$

هسته مقطع: جایی که اگر نیرو در آن باشد داخل مقطع کشش ایجاد نشود. (یک منطقه)

« kern of a Section »

مکان هندسی نقاطی است که هرگاه نیروی
محوری فشاری بر آن نقاط اثر کند
کشش در مقطع حادث نشود

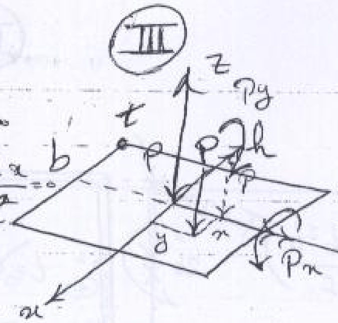


III

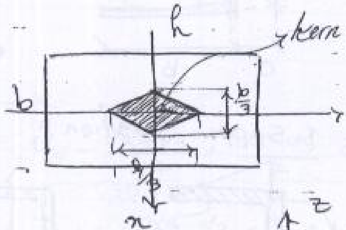
$$\sigma_T = 0 \Rightarrow -\frac{P}{A} + \frac{M_x}{S_x} + \frac{M_y}{S_y} = 0$$

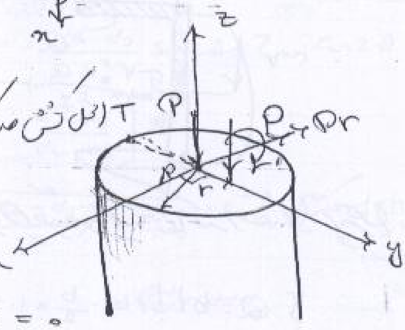
$$\sigma_T = 0 \Rightarrow -\frac{P}{b\cdot h} + \frac{P\cdot y}{\frac{bh^2}{6}} + \frac{P\cdot x}{\frac{hb^2}{6}} = 0$$

$$\boxed{\frac{x}{b/6} + \frac{y}{h/6} = 1}$$ سطح کرنل



برای $\frac{1}{4}$ مستطیل بدست می‌دهیم
می‌خواهیم مقدار مکان نقطه x و y
را به‌ازای $\sigma_t = 0$ صفر
بدست آوریم.





$$-\frac{P}{A} + \frac{M\cdot C}{I} = 0$$

$$\sigma_{t\,max} = \frac{-P}{\pi R^2} + \frac{P.r.R}{\frac{\pi}{4}R^4} = 0$$

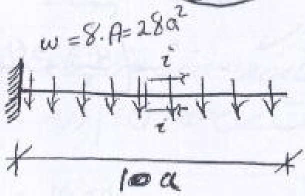
$$\boxed{r = \frac{R}{4}}$$

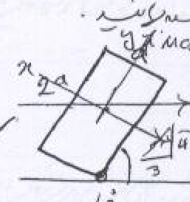
خمش کج :

تیر شکل مقابل تحت وزن تنش فشاری ماکزیمم را محاسبه نمایید.

$$w = \gamma\cdot A = 2\gamma a^2$$

$$100\gamma a^4 = \frac{2\gamma a^2 (10a)^2}{2} = \frac{w\ell^2}{2}$$



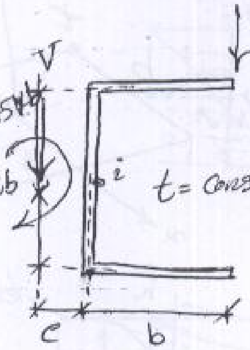


چون دو محور اصلی اینجا نیست پس این خمش کج نامیده می‌شود. ابتدا
به دو محور اصلی تجزیه کنیم.

$$\sigma_{c\,max}\Big|_{at\ i} = -\frac{M_x}{S_x} - \frac{M_y}{S_y} = -\frac{80\gamma a^4}{\frac{a(2a)^2}{6}} - \frac{60\gamma a^4}{\frac{2a(a)^2}{6}} = -300\gamma a$$

IV

= برش خارج از مرکز:



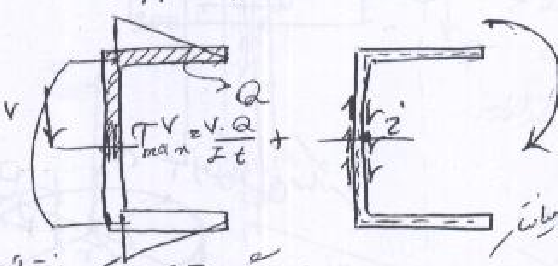
$$\left(e=\frac{h^2b^2t}{4I}\right)$$

چون مقدار کوچک است از $\frac{1}{12}bh^3$ در بال‌ها صرف‌نظر کرده‌ایم

$$I=2bt\cdot b^2+\frac{1}{12}t(2b)^3=\left(2+\frac{2}{3}\right)b^3t=\frac{8}{3}b^3t$$

$$e=\frac{(2b)^2\cdot b^2\cdot t}{4\times\frac{8}{3}b^3t}=\frac{3}{8}b=0.375b$$

« Supper Position »



$$\tau^{V}_{max}=\frac{V\cdot Q}{It}\;+\;\tau^{T}=\frac{3T}{at^2}=\frac{T\cdot t}{\frac{1}{3}at^3}$$

مقطع باز

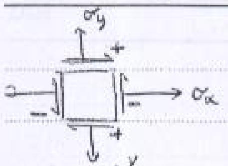
جای ماکزیمم هر دو تنش یکی شد (نقطه i) پس جمع تنش برشی.

$$\begin{cases} Q=bt\cdot b+bt\cdot\frac{b}{2}=1.5b^2t \\ a=4b \end{cases}$$

$$\tau_{max}\Big|_{at\ i}=\frac{VQ}{It}+\frac{3T}{at^2}=\frac{V\cdot 1.5b^2t}{\frac{8}{3}b^3t\cdot t}+\frac{3(1.375Vb)}{4bt^2}$$

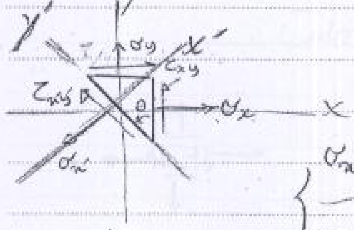
$$=\left[\frac{4.5}{8}+\frac{3(1.375)}{4}\right]\frac{V}{bt}=1.6\frac{V}{bt}$$

دایره موهر



σ کشش (+)

τ 4+b



$$\begin{cases} \sigma_{x'} - \underbrace{\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}}_{1} = \underbrace{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta}_{2} \\ \tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 \longrightarrow \boxed{tg\, 2\theta_p = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}} \ *$$

اصلی

$$\begin{cases} \sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \tau = 0 \end{cases}$$

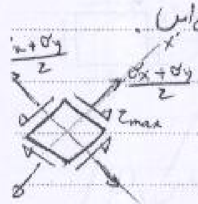
درصفحات اصلی تنش نرمال ماکزیمم
و تنش برشی صفر است.

در صفحات اصلی

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0 \Longrightarrow tg\, 2\theta_s = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

* در صفحات اصلی تنش برشی صفر است یعنی اگر المانی تنش برشی صفر داشت آن المان در صفحه اصلی است.

* در المانی که تنش برشی ماکزیمم است تنش های نرمال هم برابرند.



$$\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$

المانی که در آن تنش برشی ماکزیمم است با المانی که تنش نرمال ماکزیمم دارند 45° اختلاف فاز دارند.

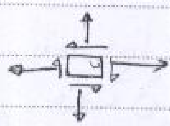
$$2\theta_s = 2\theta_p + \pi/2 \longrightarrow \theta_s = \theta_p + \frac{\pi}{4}$$

نکته:

۱) در المان تنش های اصلی تنش برشی صفر است.

۲) در المان تنش برشی حداکثر تنش نرمال روی هر دو وجه المان مساوی است.

۳) المان تنش های اصلی با المان تنش برشی حداکثر زاویه 45° می سازد.



۴) همیشه جمع تنش های نرمال در یک المان ثابت است.

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_{x''} + \sigma_{y''} = \sigma_1 + \sigma_2$$

تنش های اصلی

* جمع ۲ تنش متعامد ثابت است.

$$①^2 + ②^2$$

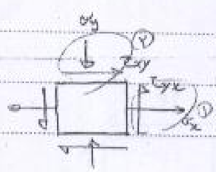
$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

مختصات مرکز دایره: $O \left| \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} , 0 \right.$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

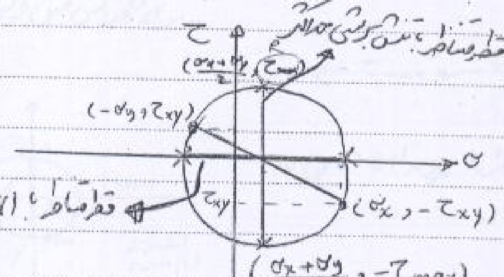
* تنش های روی یک المان روی یک دایره حرکت می کند $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$



تنش های هر وجه را یک نقطه مشخص می کند سپس دایره مور را رسم می کنند. (با داشتن تنش های دو وجه متعامد)

تنش های دو وجه متعامد مختصات دو سر قطر دایره مور است.

* از قطب تنش های یک المان از یک دایره تبعیت می کنند.



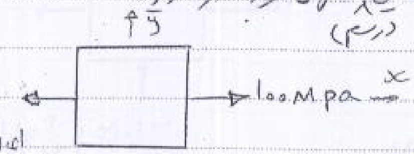
* اگر المان به اندازه θ بچرخد قطر دایره به اندازه 2θ می چرخد.

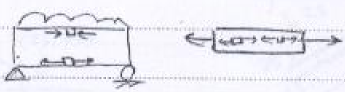
* یعنی زاویه ای که بین اقطار حاکم است نصف آن بین المان ها حاکم است.

* برای کشیدن دایره مور کافیست تنش های دو وجه متعامد را مشخص کنید.

مطلوبست تعیین تنش های اصلی و تنش برشی حداکثر و رسم المان های مربوط در المان زیر
(رسم)

توی میله ها و با مهرها اتفاق می افتد.





المان تنش

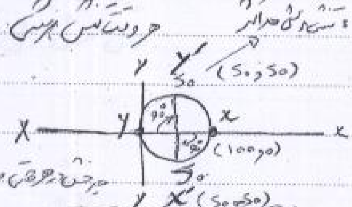
uniaxial Stress

المان تنش تک محوره

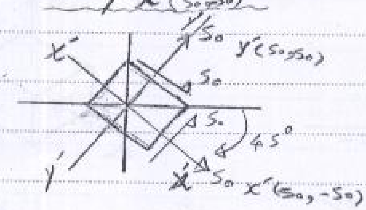
هر وقت تنش برشی را المان مشخص شد همین

50 = تنش برشی حداکثر

تنش های محوری را یک نقطه نشان می دهد



چون قطر ۹۰ می چرخد پس المان ۴۵ درجه می چرخد

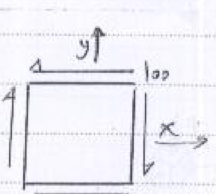


۹۰ درجه زاویه بین تنش برشی حداکثر و تنش نرمال حداکثر می باشد

نصف آن المان را می چرخانیم.

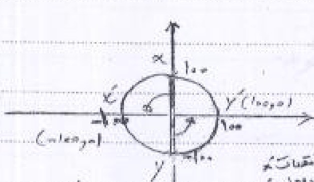
المان تنش برشی حداکثر؟

در محورهای تنش خالص نداریم و فقط تنش برشی داریم



المانی که خودش تنش برشی حداکثر است

چون ... τ_{max} ... داریم

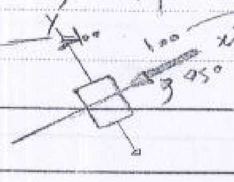


در این المان تنش های نرمال نداریم

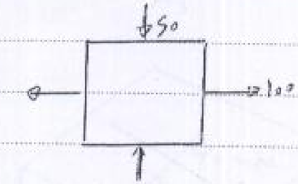
روی محور است پس خود

تنش برشی حداکثر است

چون قطر ۹۰ می چرخد المان ۴۵ می چرخد

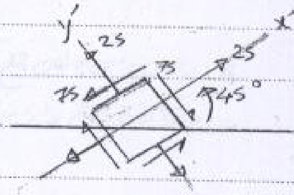


تنش های اصلی ...

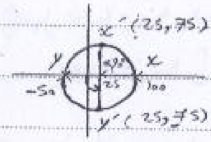


اولاً تنش‌های اصلی و ثانیاً تنش‌های برشی.

به حجم تنش‌های نرمال برابر باشد (100-50 = 25,25)

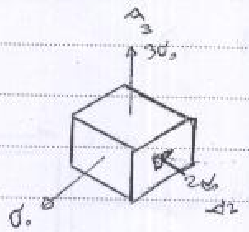


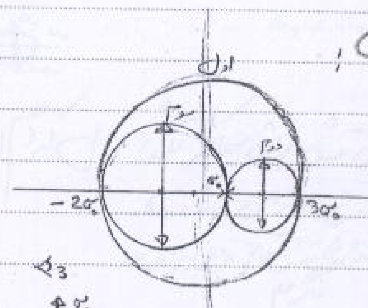
تنش‌های اصلی $\sigma_1 = 100$, $\sigma_2 = -50$



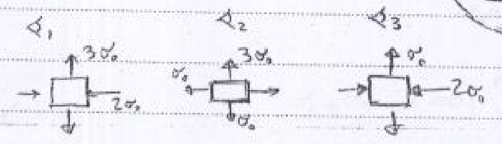
چون تنش برشی صفر است خواهیم داشت، اولاً تنش نرمال ماکزیمم است

حالت ۳ بعدی ،

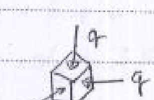


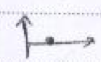


$\tau_{max} = 2.5\sigma_0$



در نقطه‌ای در صفحه آیا در این فشار هیدرواستاتیک تنش برشی ماکزیمم چقدر است؟

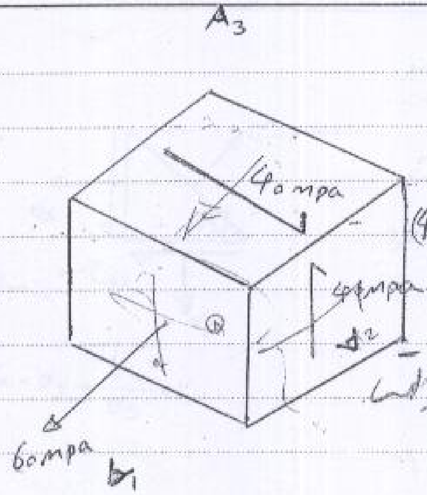




تنش برشی ماکزیمم $\rightarrow 0$

هر سه وجه یک نقطه می‌شوند.

در این شکل مقابل تنش های اصلی کدامند؟

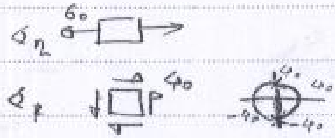


* در این برش خالص جمع تنش های اصلی صفر شد $(40+(-40)=0)$

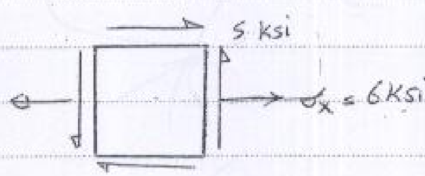
در وجه ① امتداد برش ندارد بنابراین 60 تنش اصلی خواهد بود.

در این برش خالص تنش های برشی همان تنش های برشی حداکثر است

60 40 -40



$\sigma_2 = \sigma_3$



در این تنش برشی حداکثر تنش نرمال کدام است؟

1 جمع تنش های نرمال ثابت 6

2 در صفحه تنش برشی حداکثر تنش های نرمال برابرند متعامد

$$\sigma_x + \sigma_y = 6 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 3 \\ \sigma_y = 3 \end{cases}$$

τ_{max} در آن $\sigma_{x'} = \sigma_{y'}$

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

$$2\sigma_{x'} = 6 + 0$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = 3\ \text{Ksi}$$

$\tau_{max} = ?$

جهت رسم دایره موهر در اینجا محاسبات از فرمول استفاده کن:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{6-0}{2}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

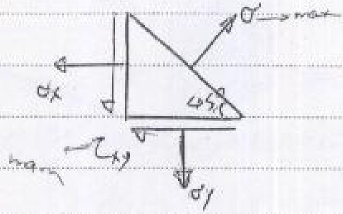
$$= \frac{6+0}{2} \pm \sqrt{34} \begin{cases} \sigma_1 \approx 9 \\ \sigma_2 \approx -3 \end{cases}$$

سری ۶-۹

ubject
ate

در نقطه‌ای وضعیت تنش مطابق شکل است نسبت $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ را بیابید.

* در امتداد تنش‌های اصلی تنش برشی صفر است.
* در امتداد تنش برشی حداکثر تنش نرمال در هر دو جهت یکسان است.
* امتداد تنش‌های اصلی با امتداد تنش برشی حداکثر زاویه ۴۵ درجه می‌سازد.



$\sigma_x = \sigma_y \Rightarrow \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 1$

۸۶/۱۱/۱۷ ساعت ۳ مهندس شکال

یحیی بابائی