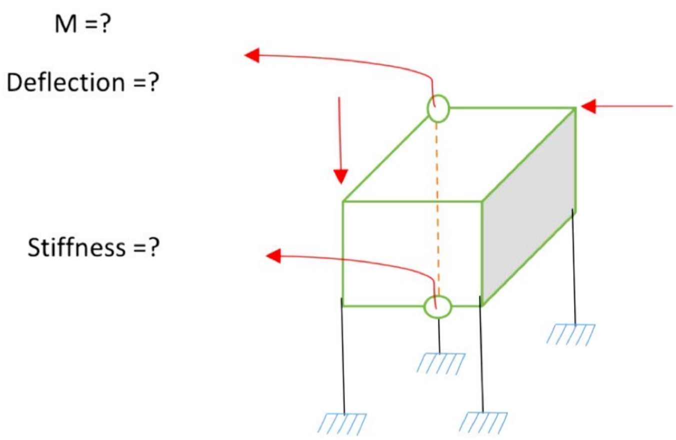
به نام خدا

تحلیل سازه 2

استاد: دکتر سجاد میرزا محمدی

گردآورنده: محمد حسین آمری فرد



فهرست مطالب — **صفحه**

پایداری سازه - درجه‌ی معینی ، نامعینی :

هر سازه‌ی متعادلی دارای تعدادی مجهول و معادله ، در روند حل سازه می‌باشد. مجهولات نیروهای تکیه گاهی (عکس العمل‌های تکیه گاهی) هستند و معادلات هم معادلات تعادل شامل ، $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ و $\sum M = 0$ (لنگر حول نقطه‌ی دلخواه) . به تفاضل تعداد مجهولات و معادلات در یک سازه ، درجه‌ی نامعینی گفته می‌شود (DI)

Degree of Indeterminacy

پس باید با انواع تکیه‌گاه‌ها آشنا شویم که تعداد مجهولات را بدانیم .

در صفحات بعد انواع تکیه‌گاه و تعداد مجهولات هر یک آمده است .

رابطه‌ی درجه‌ی نامعینی در تیرها و سازه‌های بدون قاب بسته به صورت زیر است :

$$DI = \underbrace{R}_{\text{مجهولات}} - \underbrace{(C+3)}_{\text{معادلات و شرایط}}$$

Reaction : R . Condition : C .

* اگر $DI = 0$ یعنی تعداد معادلات با مجهولات برابر است و حل معادلات ممکن است و مجهولات بدست می‌آیند . درصورتی که همه‌ی Reactionها موازی نباشند (حداقل یکی غیر موازی باشد) و همه‌ی Reactionها در یک نقطه هم‌رس نباشند دراین حالت سازه پایدار است و معین . معین یعنی اینکه نیروهای تکیه‌گاهی قابل به‌دست آمدن و یافته شدن هستند .

* $DI < 0$: سازه ناپایدار است و بر اثر بعضی نیروها قطعاً سازه فرو می‌ریزد .

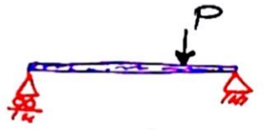
* $DI > 0$: سازه نامعین است (درصورت قرارگیری درست Reactionها پایدار نیز است) .

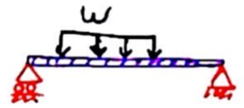
یعنی با معادلات تعادل که در دست داریم نمی‌توانیم مجهولات را بدست آوریم .

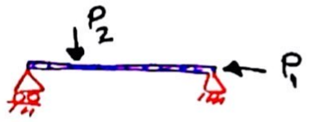
از این رو در حل سازه‌های نامعین از روش‌هایی بهره می‌بریم که در این درس بعضی از آنها مثل روش‌های نرمی (1) ، روش‌های سختی مانند روش شیب افت (2) ، روش توزیع لنگر (3) و روش کانی (4) را می‌آموزیم .

مقدمه (1)

سازه‌ی پایدار: سازه‌ای است که با وارد شدن هر نوع بارگذاری بر آن، معادلات تعادل برقرار شود.
به عبارت بهتر، سازه در این حالت تحت هر نوع بارگذاری همواره متعادل است. به عنوان مثال تیر زیر پایدار است، زیرا انواع بارگذاری قائم و افقی را می‌تواند تحمل کند.

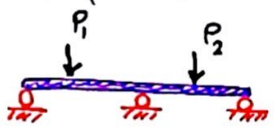




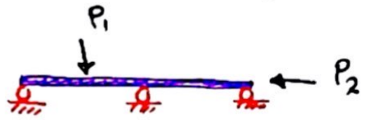


پایدار

با این تعریف در سازه ناپایدار بارگذاری ای وجود دارد که تحت آن تعادل در سازه برقرار نمی‌شود. به عنوان مثال تیر زیر در بارگذاری ① پایدار است ولی به محض اینکه بارگذاری ② را انجام دهیم ناپایدار می‌شود.

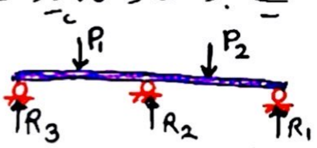


①



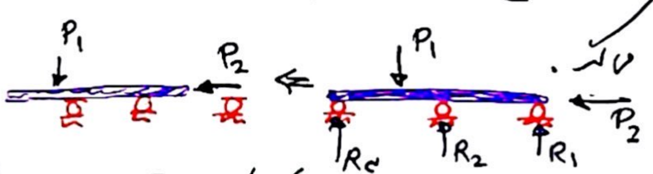
②

در این سازه چون بارهای وارده قائم هستند و تکیه‌گاه‌های غلتکی نیز در برابر بار قائم مقاومت دارند. در اثر این بارها سازه ناپایدار نخواهد شد.



اما چون تحت این بارهای P_1 و P_2 پایدار هستند نمی‌توان نتیجه گرفت سازه تحت اثر هر گونه بارگذاری پایدار است. برای بهتر روشن شدن شکل ② را دقت کنید.

در این سازه تکیه‌گاه‌ها غلتکی هستند و تکیه‌گاه غلتکی فقط عکس‌العمل قائم دارد یعنی در مقابل P_1 سازه پایداری دارد اما این سازه و تکیه‌گاه‌هایش هیچ عکس‌العمل در برابر P_2 ندارند و با کوچک‌ترین مقدار P_2 سازه ناپایدار می‌شود و شروع به حرکت می‌کند.

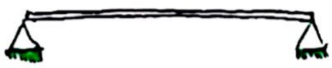


سازه از جای خود حرکت کرده است، ناپایدار است.

در سازه‌های معین و نامعین اگر همه‌ی نیروهای تکیه‌گاهی (عکس‌العمل‌ها) همرس باشند و یا همه با هم موازی باشند، سازه ناپایدار خواهد بود.

تمرین 2 مثال 1: درجه‌ی نامعینی تیرهای زیر را مشخص کنید.

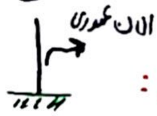
الف)



ب)

حل : ابتدا لازم است با انواع تکیه‌گاه و نوع عملکرد آن‌ها آشنا شویم.

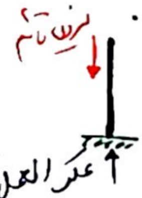
1) تکیه‌گاه گیردار :



در این تکیه‌گاه اگر نیروی افقی وارد شود سبب حرکت المان عمودی نمی‌شود و تکیه‌گاه از حرکت افقی جلوگیری می‌کند.

عکس العمل توسط تکیه‌گاه

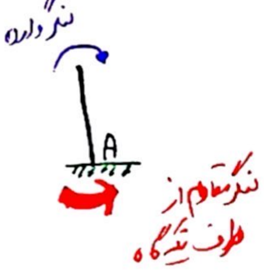
گویا تکیه‌گاه سبز رنگ محکم (صلب) میله‌ی مشکی را نگهداشته است تا در جهت ↔ حرکتی صورت نگیرد. در واقع تکیه‌گاه در مقابل حرکت افقی مقاومت دارد.



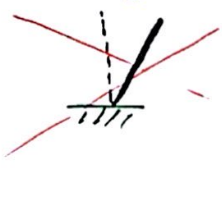
تکیه‌گاه سبز در مقابل حرکت قائم نیز مقاومت دارد و جلوگیری می‌کند.

پس به این ترتیب المان عمودی مشکی رنگ نه در جهت افقی جابه‌جا می‌شود نه در جهت قائم.

تکیه‌گاه گیردار از چرخش عضو نیز حول نقطه‌ی A (محل اتصال المان به تکیه‌گاه) جلوگیری می‌کند.



یعنی با وارد آمدن لنگر المان شروع به چرخش نمی‌کند.



این اتفاق نمی‌افتد.

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

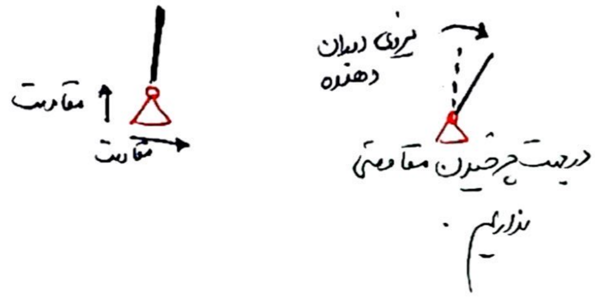
اگر المان حول نقطه‌ی A شروع به چرخیدن می‌کند اصطلاحاً می‌گوییم نقطه‌ی A، مفصل است.

و نمایش مفصل در شکل یک دایره‌ی توخالی است.

در مفصل چرخش آزاد است.

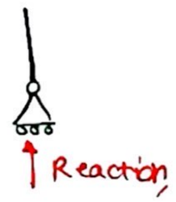
در تکیه‌گاه گیردار اصطلاحاً می‌گوییم ۳ عکس‌العمل (Reaction) داریم یعنی درصورت وارد آمدن نیرو در سه پارامتر جهت افقی، جهت قائم و چرخش حول A، قید داریم یعنی در مقابل این نوع حرکت، تکیه‌گاه مقاومت می‌کند.

۲) تکیه‌گاه مفصلی: در دو جهت افقی و قائم مقاومت دارد ولی از چرخش و دوران جلوگیری نمی‌کند.



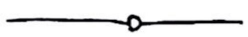
* پس تکیه‌گاه مفصلی دو Reaction دارد.

۳) تکیه‌گاه غلتکی: فقط و فقط از حرکت قائم جلوگیری می‌شود.



پس تکیه‌گاه غلتکی فقط یک Reaction دارد.

* تکیه‌گاه‌های دیگری نظیر تکیه‌گاه لغزنده گیردار، تکیه‌گاه تلسکوپی، تکیه‌گاه ترکیبی مختلف داریم.



در داخل اعضا هم بعضاً شرایط داخلی هم داریم. مثلاً مفصل خمشی

که بحث مفصل در استاتیک و تحلیل سازه‌ها آمده است که در اینجا از این بحث عبور می‌کنیم.

به تعداد Reaction هایی که در تکیه گاه های مختلف داریم، مجهول داریم. یعنی نمیدانیم هر تکیه گاه چه سهمی از مقاومت در برابر بارهای وارد آمده را دارند.

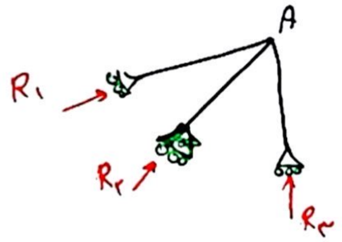
از طرفی اگر سازه پایدار (Stable) باشد، یعنی سازه در جهت x حرکتی ندارد پس $\Sigma F_x = 0$، در جهت y حرکتی نداریم، $\Sigma F_y = 0$ و حول نقطه ی دلخواه A نیز چرخشی نداریم، $\Sigma M_A = 0$.

به سه معادله ی فوق معادلات تعادل می گوییم.

معین و نامعین، تعادل و عدم تعادل:

اگر در یک سازه سه نیروی تکیه گاهی غیر هم رس داشته باشیم سازه در تعادل است.

(اگر هر سه در یک نقطه هم رس باشند، با وجود سه Reaction سازه نامتعادل است (یا ناپایدار) زیرا با دوران حول همان نقطه هیچ Reaction نخواهیم داشت.



مثلاً در سازه ی روبه رو 3 Reaction داریم ولی هر سه در نقطه ی A هم رسند و اگر نیرویی بخواهد سازه را حول A بچرخاند هیچ مقاومتی در سازه وجود ندارد.

پس اگر در یک سازه سه نیروی غیر هم رس داشته باشیم سازه پایدار است و توسط سه معادله ی تعادل می توان این سه مجهول را معلوم کرد یعنی می توان با حل معادلات مقدار هر یک از این مجهولات را مشخص کرد.

اما اگر در یک سازه تعداد Reaction های غیر هم رس از ۳ تا بیشتر بود سازه نامعین نام دارد یعنی $R \geq 4$ و معادلات تعادل = ۳، و با سه معادله نمی توان ۴ مجهول یا بیشتر را بدست آورد.

تعداد Reation

در کل رابطه درجه نامعینی به شرح زیر است:

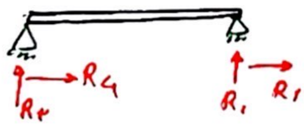
$$DI = R - (C+3)$$

Degree of Indeterminacy

Condition تعداد معادلات شرط

الف)

Reaction 4 ⇐



$$DI = 4 - (0+3) = 1$$ درجه نامعین

ب)

$$DI = 6 - (0+3) = 3$$ درجه نامعین

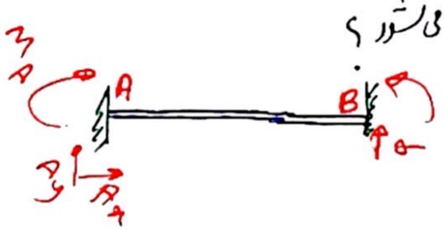
این سازه، ۳ درجه نامعین است. یعنی ۳ مجهول بیشتر از تعداد معادلات ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$) دارد.

لذا، با روابط با معادلات استاتیکی نمی‌توانیم این 6 مجهول را بیابیم.

(کل reaction ها)

تمرین C2 : تیر زیر با حذف چه نیروهای تکیه گاهی ناپایدار می شود؟

مثال ۲ ،



حل : از مفاهیم داریم که در هر تکیه گاه گیردار A و B سه عکس العمل تکیه گاهی وجود دارد. پس 3 درجه نامعین است.

$$DI = R - \{C + \underbrace{3}_{\text{معادلات تعادل}}\} = 6 - \{0 + 3\} = 3$$

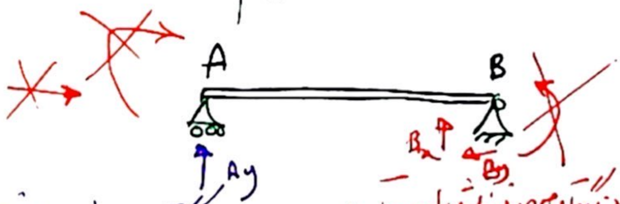
یعنی 3 Reaction اضافه داریم

به دلیل 3 درجه نامعینی می باشیم که یعنی 3 قید تکیه گاهی اضافی است که با برداشتن آنها سازه باز هم پایدار می ماند. مثلاً می توان یکی از تکیه گاه ها را کلاً حذف کرد. (مثلاً A)

تکیه گاه A را حذف کردیم و سازه پایدار باقی ماند.

یعنی سه Reaction A_x و A_y و M_A را حذف کردیم.

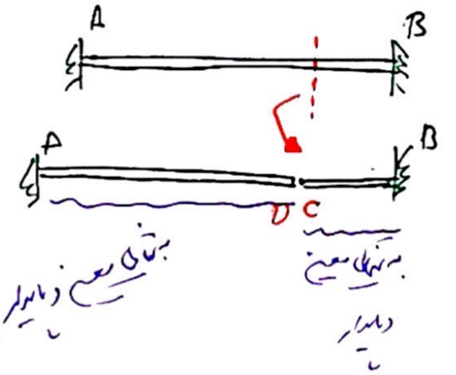
یا مثلاً می توان نوع تکیه گاه را عوض کرد.



لنگر مقاوم و نیروی افقی مقاوم حذف شده است. دیگر تنها A_y باقی مانده است. (گیردار ← غلتکی)

لنگر مقاوم حذف شده است. فقط B_y و B_x مانده است. (گیردار ← مفصلی)

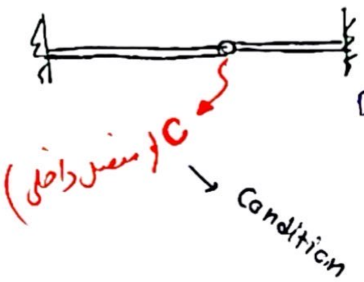
حتی اگر تیر را به دو قسمت تقسیم کنیم هر قسمت + تکیه‌گاه انتهای همان قسمت یک سازه‌ی معین پایدار خواهد بود.



هر دو تیر AD و BC به صورت جداگانه با تکیه‌گاه خود عضو گیردار است

هر دو پایدار که کلی ۲ تا سازه دیدیم.

ممکن است فردی با اضافه کردن مفصل داخلی سازه را بخواهد حل کند.



$$DI = R-(C+3) = 6-(1+3) = 2$$

قبلاً صفر بود!

۲ درجه نامعین.

پس یک تیر دو سرگیردار درجه‌ی نامعینی بالایی دارد و برای اینکه از حالت پایداری بخواهد خارج شود باید بیش از ۳ قید آن از بین برود. اگر ۱ یا ۲ تا Reaction را برداریم کماکان نامعین و پایدار است. اگر ۳ Reaction را برداریم پایدار است و معین.

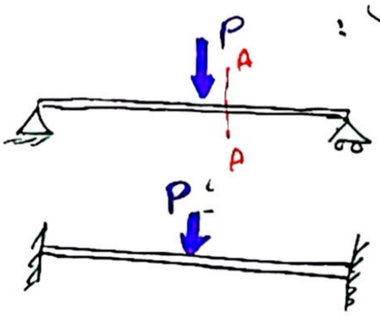
بیش از سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی برداریم اصلاً ناپایدار می‌شود.

لذا یک تیر ۲ سرگیردار زمانی Collapse می‌کند که بیش از ۳ عکس‌العمل تکیه‌گاهی را حذف کنیم.

بررسی رفتار مقطع یک تیر در اثر اعمال بار ثقلی :

حال اگر فرض کنیم که سازه در تکیه گاه صلبیت کافی را دارد و در اثر اعمال بار تکیه گاه‌ها خراب نشوند ، ممکن است خود تیر در زیر اعمال بار نتواند مقاومت کافی داشته باشد و اصطلاحاً Fail کند یا دچار Collapse شود .

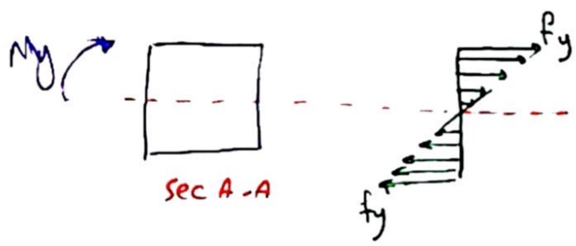
مراحل حالت اعمال بار و در نهایت خرابی یک تیر به شرح زیر است :



۱. P را کم کم از صفر زیاد می‌کنیم تا کم کم در تیر تغییر شکل‌هایی ایجاد شود و تیر در سطح زیرین و بالایی خود به تنش جاری شدن برسد.

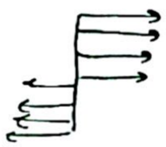
بر اثر اعمال بار در نواحی لنگر مثبت تار بالایی تیر به فشار می‌افتد و تار پایینی به کشش .

البته از تحلیل سازه ۱ می‌دانیم وضعیت نمودار لنگر خمشی تیر در حالت دو سر ساده با تیر در حالت دو سر گیردار با هم متفاوت است. اما در هر دو حالت بیشترین لنگر مثبت دقیقاً در وسط تیر اتفاق می‌افتد. (البته در تیر دو سر ساده در وسط دهانه لنگر خمشی بیشتر است) .

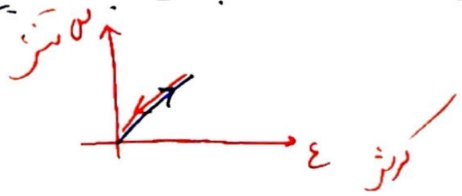


لنگر نظیر جاری شدن اولین تار را (لنگر جاری شدن) M_y می‌گوییم.

۲. P بیشتر شود تا مقطع تیر به مرحله پلاستیک برسد. M_p

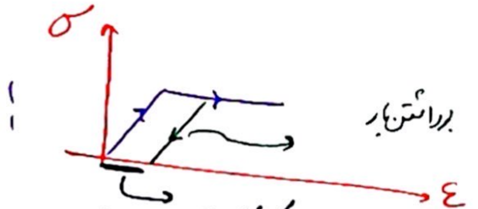


فرض بر این است که در مرحله الاستیک تغییر شکل‌های ایجاد شده در صورت برداشتن بار از بین می‌رود.



عنوان نمودار رنگ به این معناست که در صورت برداشتن بار از روی مقطع کرنش‌ها دوباره به صفر باز می‌گردند.

با افزایش P وقتی وارد ناحیه پلاستیک می‌شویم تغییر شکل‌ها ماندگار است اما باز هم با برداشتن بار مقداری از کرنش می‌ماند و مقداری کم می‌شود به این ترتیب که موازی قسمت الاستیک باز می‌گردد.



کرنش پایا شده در مقطع بعد از برداشتن بار در ناحیه پلاستیک.

پس سازه‌ی معین استاتیکی $DI = 0$ دارد و با معادلات استاتیکی قابل حل است.

سازه‌ی نامعین 〃 $DI > 0$ دارد و 〃 〃 〃 〃 نیست.

به وسیله‌ی معادلات استاتیکی نمی‌توان سازه‌های نامعین استاتیکی را تحلیل نمود و باید معادلاتی از جای دیگر و با استفاده از شکل دیگر به مسئله اضافه کرد.

به این ترتیب روش‌هایی برای تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی وجود دارد که در دو دسته‌ی کلی دسته‌بندی می‌شوند.

روش‌های تحلیل سازه‌های نامعین:
1. روش نرمی (نیرو)
2. روش سختی (تغییر مکان)

آشنایی با مفاهیم روش نرمی:

روش نرمی از روش‌هایی نسبتاً ساده‌ی تحلیل سازه‌های نامعین محسوب می‌شود. روند کلی حل مسائل سازه‌های نامعین با این روش به صورت مراحل زیر می‌باشد:

1. محاسبه‌ی درجه‌ی نامعینی سازه. (DI)
2. حذف قید یا قیدهای مناسب از سازه به تعداد DI. (Reaction)
3. تعیین معادلات سازگاری متناظر با قیدهای حذف شده
4. محاسبه‌ی مقدار قیدهای مجهول حذف شده با استفاده از معادلات سازگاری

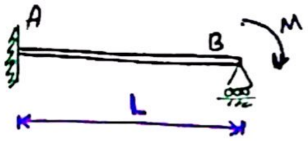
جهت درک بهتر به مثال توجه می‌کنیم:

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

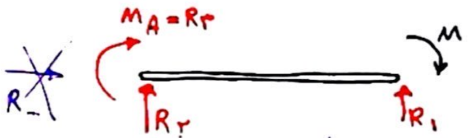
مثال ۳: در تیر مقابل: الف) عکس العمل قائم تکیه گاه B را به دست آورید.

ب) لنگر در نقطه‌ی A و دوران نقطه‌ی B را بیابید.



گام اول: درجه‌ی نامعینی سازه را بدست می‌آوریم.

معمولاً در اکثر سؤالات مربوط به تیر چون هیچ نیروی وارد بر سازه و هم عکس العمل های تکیه گاهی در جهت افقی $\xrightarrow{x}$ صفر هستند آنها را نه در عکس العمل‌ها حساب می‌کنیم و نه $\Sigma F_x = 0$ را در معادلات تعادل سؤال به حساب می‌آوریم. یعنی داریم:



جزئی از عکس العمل افقی نیست!

$R = 3$

معادلات تعادل $= 2$

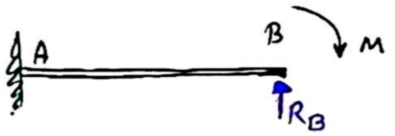
شرط $C = 0$

درجه‌ی نامعینی $\rightarrow DI = 3 - (0+2) = 1$

گام دوم: در این مرحله باید به تعداد درجه‌ی نامعینی سازه از نیروهای تکیه گاهی حذف کنیم (قید اضافی را حذف می‌کنیم) تا سازه معین شود.

مثلاً در اینجا کافیست تکیه گاه B را حذف نموده و به جای آن یک نیروی R_B رو به بالا قرار دهیم.

البته جهت R_B را می‌توان در خلاف نیز در نظر گرفت.



گام سوم: تشخیص و نوشتن معادله‌ی همسازی: Compatibility

در تیر اصلی (واقعی) به علت وجود داشتن تکیه گاه در نقطه‌ی B، نقطه‌ی B در جهت قائم مقید (قفل) است و امکان حرکت قائم ندارد.

پس اگر ما در مرحله‌ی قبلی آمدیم و تکیه گاه B را حذف کردیم باید کاری کنیم که واقعیت سؤال، لطمه‌ای نخورد پس غیر از اینکه تکیه گاه را حذف کردیم و در آن نقطه R_B را قرار داریم مهم‌تر این است که

اثر تکیه‌گاه B را نیز لحاظ کنیم که این اثر همان عدم حرکت نقطه B در جهت قائم (Δ) می‌باشد.

یعنی باید بنویسیم: $\Delta_{yB}=0$. یعنی اگر فقط جای تکیه‌گاه B ، نقطه‌ی نیروی $\uparrow R_B$ قرار دادیم این مسئله از واقعیت دور بود و ممکن بود تحت اثر لنگر M و $\uparrow R_B$ نقطه‌ی B در جهت قائم (Δ) دچار جابه‌جایی شود که کلاً سؤال غلط می‌شد پس با معادله‌ی همسازی $\Delta_{yB}=0$ مدل جدید سؤال را منطبق واقعیت اصلی سؤال قرار می‌دهیم.

این رابطه‌ی $\Delta_{yB}=0$ رابطه‌ی همسازی یا سازگاری نام دارد.

گام چهارم: در اینجا با استفاده از روابط رایج خیز و شیب تیرها که در فصل‌های گذشته مطالعه کرده‌ایم، Δ_{yB} را محاسبه کرده و با استفاده از معادله‌ی سازگاری Δ_{yB} را محاسبه کرده و با استفاده از معادله‌ی سازگاری R_B را به دست می‌آوریم.

در اینجا از اصلی به نام سوپرپوزیشن بهره می‌بریم یعنی می‌توانیم یک بار فرض کنیم فقط لنگر M به انتهای تیر وارد می‌آید و R_B را در نظر نگیریم و در این حالت Δ_1 را بیابیم:

Δ_1 تنها در اثر اعمال لنگر M به دست می‌آید.

Deflection

و یک بار هم لنگر M را در نظر نگیریم و فقط نیروی $\uparrow R_B$ را به تیر وارد کردیم و تغییر مکان (جابه‌جایی) را در این حالت Δ_2 بنامیم.

در نهایت حالت کلی تیر همان جمع دو حالت Δ_1 و Δ_2 می‌باشد. که به این عملیات جمع دو حالت و نتیجه کلی گرفتن super position می‌گوییم.

طبق روابط گذشته در تحلیل سازه می‌دانیم:

در تیر یک سرگیردار اگر لنگر M وارد آید میزان جابجایی از رابطه‌ی $\Delta_1 = \frac{ML^2}{2EI}$ بدست می‌آید.

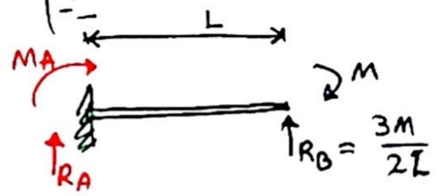
و همچنین در تیر یک سرگیردار اگر نیروی $\uparrow R_B$ در سر آزاد تیر وارد شود میزان جابجایی از رابطه‌ی $\Delta = \frac{+R_B L^3}{3EI}$ بدست می‌آید. اگر جهت مثبت را رو به پایین بگیریم: $\Delta_1 > 0$ و $\Delta_2 < 0$ خواهد بود.

طبق معادله‌ی همسازی مجموع Δ_1 و Δ_2 باید صفر شود (چون در تیر واقعی نقطه B متصل به تکیه‌گاه بوده جابجایی قائم آن صفر بود.)

$$\Delta y_B = \Delta_1 + \Delta_2 = 0 \Rightarrow \frac{-R_B L^3}{3EI} + \frac{ML^2}{2EI} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{R_B \cancel{L^3}^{1}}{3\cancel{EI}} = \frac{M\cancel{L^2}}{2\cancel{EI}} \longrightarrow R_B = \frac{3M}{2L}$$

ب) پس از یافتن R_B و معلوم شدن یکی از عکس‌العمل‌ها تعداد مجهول‌ها یکی کم شد و الان دو مجهول داریم با استفاده از روابط تعادل $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$ ، M_A و R_A را می‌یابیم.

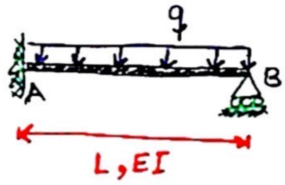


$$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_A = 0 \longrightarrow -R_A(L) + M + M_A = 0 \Rightarrow -\frac{3M}{2\cancel{L}}(\cancel{L}) + M + M_A = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = \frac{M}{2}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow R_B + R_A = 0 \therefore \longrightarrow R_A = \frac{-3M}{2L}$$

$$\curvearrowright \theta_B = \frac{ML}{EI} - \frac{\frac{3M}{2L} \times L^2}{2EI} = \boxed{\frac{ML}{4EI}}$$

مثال 5: تیر مقابل را از روش نرمی تحلیل کنید.



گام اول: درجه ی نامعینی سازه

حل: با درنظر نگرفتن جهت افقی (مانند مثال قبل)، سازه یک درجه نامعین است:

دو عکس العمل در گیردار

و یک عکس العمل در تکیه گاه ساده

B (اصولاً شرایط ندارد) .

و از طرفی دو معادله ی تعادل $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M = 0$.

$$DI = R - (C + 2) = 3 - 2 = 1$$

که عکس العمل — 0 — تعداد معادلات

گام دوم: حذف قیدهای اضافی

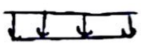
ابتدا باید یکی از قیدها را آزاد کنیم.

راحت ترین آزاد کردن تکیه B است. (تکیه گاه B را حذف می کنیم) و به جای آن یک نیروی R_B قرار می دهیم.

گام سوم: معادله ی سازگاری

اکنون با توجه به تکیه گاه بودن نقطه ی B در تیر واقعی؛ باید $\Delta_B = 0$ باشد.

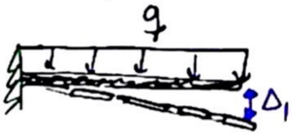
یکبار R_B را کنار می گذاریم و Δ_1 را برای q حساب می کنیم و بار دیگر نیروی گسترده ی q



را کنار گذاشته و Δ_2 را برای R_B حساب می کنیم. معادله ی سازگاری $\Delta_{yB} = \Delta_1 + \Delta_2 = 0$

گام چهارم: استفاده از روابط خیز که قبلاً در تحلیل سازه خواندیم Δ_1 و Δ_2 را حساب کنیم.

Δ_1:



$$\Delta_1 = \frac{qL^4}{8EI}$$

Δ_2:

$$\Delta_2 = \frac{-R_B L^3}{3EI}$$

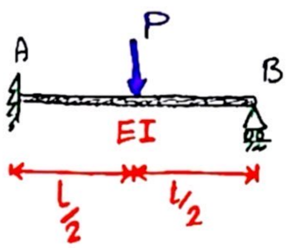
معادله ی سازگاری

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \frac{qL^{\cancel{4}}}{8\cancel{EI}} - \frac{R_B \cancel{L^3}}{3\cancel{EI}} = 0 \longrightarrow R_B = \frac{3qL}{8}$$

حال که یکی از مجهولات تکیه گاهی مشخص شد تیر معین است و با نوشتن معادلات تعادل می توان تمام مجهولات تکیه گاهی را استخراج کرد.

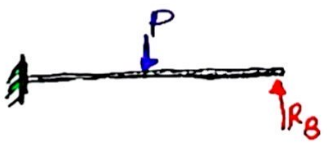
$$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow M_A = qL \times \frac{L}{2} - R_B \times L = \frac{qL^2}{8}$$

مثال 5: تیر مقابل را به روش نرمی تحلیل کنید.



حل: گام اول: درجه نامعینی سازه را به دست می آوریم:
مانند ۲ مثال قبل یک درجه نامعین است.

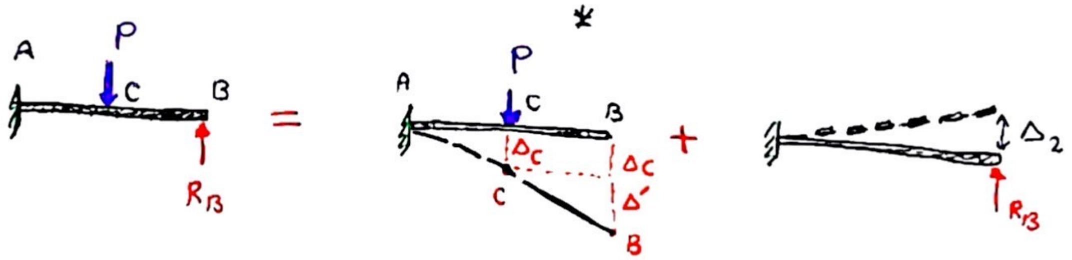
گام دوم: حذف قید تکیه گاهی (خود تکیه گاه به تعداد درجات نامعینی): تکیه گاه B را حذف می کنیم و بجای آن $R_B \uparrow$ قرار می دهیم.



گام سوم: معادله همسازی: مانند توضیحات مثال قبلی در نقطه B، $\Delta y_B = 0$.

گام چهارم: یک بار $R_B\uparrow$ را کنار می‌گذاریم و تحت اثر $P\downarrow$ ، Δ_1 را در نقطه B به دست می‌آوریم.

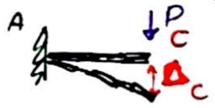
بار دیگر $P\downarrow$ را کنار می‌گذاریم و تحت اثر $R_B\uparrow$ ، Δ_2 را در نقطه B بدست می‌آوریم



در اینجا R_B را در نظر نگرفتیم و فقط اثر $P\downarrow$ را در جابجایی نقطه B در نظر می‌گیریم.

در اینجا P را در نظر نگرفتیم و فقط اثر $R_B\uparrow$ را در جابجایی نقطه B در نظر می‌گیریم.

* توضیح در مورد جابجایی: از نقطه A تا C به علت وجود نیروی $P\downarrow$ تیر قوس برمی‌دارد و جابجایی Δ_C را داریم.



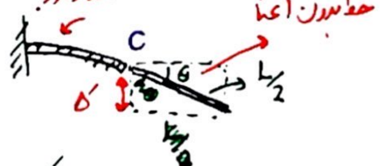
با استفاده از روابط تحلیل ۱ داریم: $\Delta_C = \frac{P(L/2)^3}{3EI}$ و از روابط گذشته داریم: $\theta_C = \frac{P(L/2)^2}{2EI}$

در ادامه تیر از C تا B نیرویی نداریم لذا در ادامه تیر، تیر انحنایی ندارد. (اعمال نیرو سبب انحنای تیر می‌شود) پس قسمت CB از تیر به صورت خط راست است اما چون در C ، زاویه θ نسبت به افق داریم

قسمت CB که خط راست است به صورت مایل به پایین می‌رود.

$$tg\theta = \frac{\Delta'}{L/2}$$

طبق روابط مثلثاتی:



(از ریاضی می‌دانیم برای زوایای خیلی کوچک: $tg\theta = \theta$) $\leftarrow$ $\theta_C = \frac{\Delta'}{L/2}$ $\leftarrow$ $\Delta' = \theta_C \times L/2$

$$\Delta' = \frac{P(L/2)^2}{2EI} \times L/2 \longleftarrow \theta_c = \frac{P(L/2)^2}{2EI}$$ از تحلیل ۱ داریم

$$\Rightarrow \Delta_{1B} = \Delta_c + \Delta' = \left[\frac{P(L/2)^3}{3EI} + \frac{P(L/2)^2}{2EI} \times L/2 \right]$$

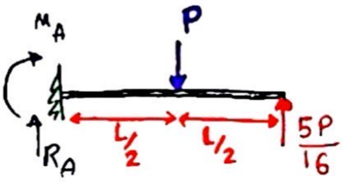
و همچنین در مورد تیر تحت بار نیروی $R_B \uparrow$ داریم

$$\Delta_2 = \frac{-R_B L^3}{3EI}$$

رابطه‌ی همسازی

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_{yB} = 0 \longrightarrow$$

$$\frac{P(L/2)^3}{3EI} + \frac{P(L/2)^3}{2EI} - \frac{R_B L^3}{3EI} = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = \frac{5P}{16}}$$



اکنون با محاسبه‌ی R_B تیر AB معین شده است و داریم:

معادلات تعادل:

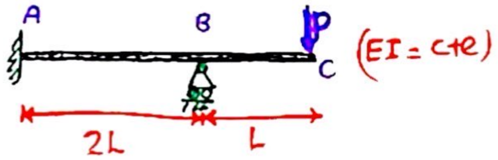
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow M_A + P(L/2) - \frac{5P}{16}(L) = 0$$

$$M_A = \frac{3PL}{16}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -P + R_A + \frac{5P}{16} = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{11P}{16}}$$

اکنون M_A و R_A و در مرحله قبل نیز R_B به دست آمد. در واقع همه‌ی مجهولات تکیه‌گاهی معلوم شد پس تیر تحلیل شد.

مثال 6: در تیر مقابل مطلوب است :



الف) لنگر در تکیه گاه A   ب) تغییر مکان قائم نقطه ی C .

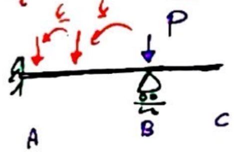
حل: در تیر فوق قطعه ی AB از یک سر گیردار و از یک سر مفصلی است .

و قطعه BC یک قطعه کنسول (cantiliver) است کنسولی یعنی از یک طرف تکیه گاه دارد و از طرف دیگر آزاد است .

در مثال ای قبل مانند این تیر را داشتیم اما اگر بتوانیم با انتقال P↓ به نقطه ی B و همچنین در نظر گرفتن آثار این انتقال قسمت کنسولی را کنار بگذاریم به هدف رسیده ایم .

به طور واضح تر منظور این است :

P نیروی عمودی رو به پایین است پس اگر این نیرو را همان طور رو به پایین به B اعمال کنیم، (یا هر نقطه ی دیگری)



از نگاه راستای $\Sigma F_y = 0$ هیچ فرقی در کل تیر ندارد.

اما با منتقل کردن P به نقاط دیگر اگر حواسمان به ممان نباشد این انتقال غلط است .

به این ترتیب که مثلاً بیاییم بررسی کنیم تفاوت اعمال نیروی P↓ در نقطه C و B چیست ؟

اگر P در C اعمال شود یک لنگر $M = P \times$ فاصله ی BC (L) روی نقطه ی B وارد می آورد.

اما اگر همین P در B اعمال شود جزئی از این لنگر در نقطه ی B نیست چون نیرو روی B است و نیرو هیچ گاه در نقطه ای که وارد شود لنگر ایجاد نمی کند (چون بازو ندارد) .

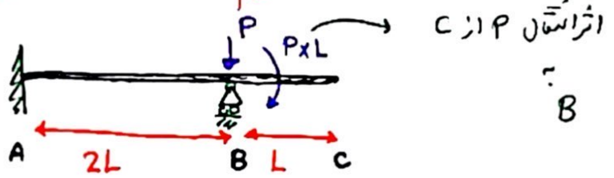
پس اگر از این منظر ببینیم که لنگر حول نقطه ی B آیا با جابجایی نیروی P از روی نقطه ی C به نقطه ی B تفاوتی دارد پاسخ مثبت است ! به این ترتیب که اگر P روی C باشد حول نقطه B

لنگری برابر (P)(L) دارد اما اگر روی خود B باشد لنگری ندارد (لنگر صفر است) .

با این توضیحات به خوبی می‌یابیم که اگر بخواهیم نیرو را از روی نقطه C برداریم و به نقطه‌ی B بیاوریم (جابه‌جا کنیم) باید حتماً یک لنگر به اندازه‌ی (P)(L) به صورت متمرکز روی B قرار دهیم .

البته در گام قبلی دیدیم از زاویه‌ی نگاه ΣF_y جابه‌جایی P در طول تیر تفاوتی ایجاد نمی‌کرد.

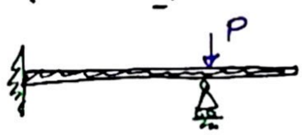
پس کلاً پس از جابه‌جایی P به نقطه B این تیر زیر را داریم که دقیقاً معادل تیر اصلی صورت سؤال است .



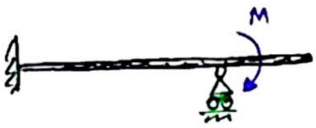
سؤالی که اینجا مطرح می‌شود این است که این همه بحث و بررسی که انجام شد تا P را از C به B منتقل کنیم ، آیا این انتقال دلیلش چیست ؟

پاسخ این است که کلاً در بحث‌های تحلیل سازه و کلاً در بحث‌های مهندسی دنبال این هستیم که الگوهایی را داشته باشیم و با توجه به الگوها از حجم محاسبات بکاهیم .

مدل تیر مطرح شده در این سؤال را در مثال‌های قبل نداشتیم . اما اکنون که موفق به جابه‌جایی بار P از نقطه‌ی C به نقطه B شدیم حال این مدل تیر آشناست . در واقع شبیه دو مثال قبل به صورت ترکیبی :



اول تیر مقابل که یک نیروی متمرکز روی تکیه‌گاه غلتکی داشتیم . (θ_C در مثال 5)



دوم تیر مقابل که یک لنگر متمرکز روی تکیه‌گاه غلتکی داشتیم . (مثال 3 صفحه‌ی 10)

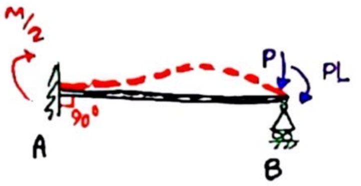
اکنون پس از توضیحات دلیل و روش انتقال نیرو از C به B خود تیر را بررسی می‌کنیم.

درصورت سؤال P به C وارد شده است اگر P را به B منتقل کنیم و لنگر $P \times L$ را روی B اثر دهیم

به بررسی تغییر شکل تیر می‌پردازیم:

الف) اگر حالت اعمال P روی B و لنگر $P \times L$ در B را ملاحظه کنیم داریم:

قسمت AB تیر: نیروی P هیچگونه لنگری حول A ایجاد نمی‌کند و طبق نتایج مثال 3، لنگر $\frac{M}{2}$ در تکیه‌گاه A پدید می‌آید.



و تغییر شکل تیر به صورت روبه‌رو خواهد بود. (شکل نارنجی رنگ)

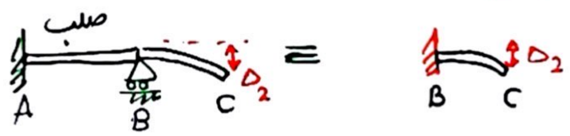
برای محاسبه‌ی جابه‌جایی نقطه C از سر آزاد کنسول BC می‌دانیم در این قسمت دو جابه‌جایی خواهیم داشت:

جابه‌جایی اول با فرض صلب بودن BC و فقط در اثر چرخش تیر در نقطه‌ی B یعنی

$$\Delta_1 = \theta_B \times L$$

که قبلاً هم شبیه آن را دیدیم

جابه‌جایی دوم قسمت AB را صلب فرض کنیم یعنی گویی BC به تکیه‌گاه گیردار متصل است و تحت اثر نیروی P انحنادار شده است و دارای Δ_2 شده است:



از جمع Δ_1 و Δ_2 جابه‌جایی در نقطه‌ی C به دست می‌آید.

θ در نقطه‌ی B همان θ_B است که بر اثر لنگر متمرکز روی تکیه‌گاه غلتکی ایجاد شده است

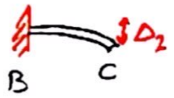
که از مثال ص 12 داریم:

$$\theta_B = \frac{M \times 2L}{4EI} = \boxed{\frac{PL^2}{2EI}}$$

پس Δ_1 برابر است با:

$$\Delta_1 = \theta_B \times L = \boxed{\frac{PL^3}{2EI}}$$

تغییر شکل در حالت اعمال P روی C به شرط صلبیت AB :



طبق روابط تیرکنسول در ص 15 هم استفاده شد :

$$\Delta_2 = \frac{PL^3}{3EI}$$

ب) ←

$$\longrightarrow \quad \Delta_C = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{PL^3}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI} = \boxed{\frac{5\,PL^3}{6\,EI}}$$

Scanned with CamScanner

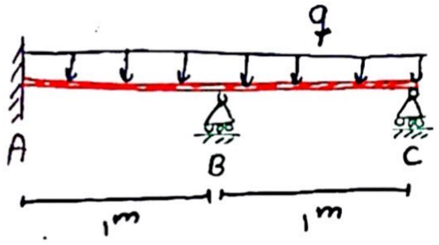
Scanned with CamScanner

موضوع: روش نرمی در تیر نامعین

نام: محمدحسین آمری‌فرد

درس: تحلیل سازه‌ی ۲ / استاد: دکتر سجاد میرزا محمدی / شماره دانشجویی: ۹۸۴۴۳۰۰۰۱۰۰

ص ۸ جزوه

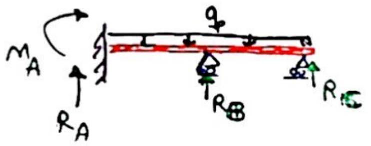


تمرین ۱: تیر مقابل را تحلیل کنید. (به روش نرمی)

(بعداً می‌توان با تبدیل 1m به متغیرها راحت‌تر هم حساب کرد.)

حل:

مرحله‌ی اول: ابتدا درجه‌ی نامعینی سازه را می‌یابیم. (در جهت x هیچ نیرویی نداریم پس در جهت x مجهولی هم درنظر نمی‌گیریم.)



تعداد Reaction ها / تکیه‌گاهی:

۴ مجهول داریم: M_A و R_A و R_B و R_C.

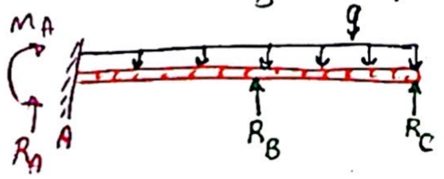
تعداد معادلات تعادل ۲ تا است. $\Sigma M_{\square}=0$ و $\Sigma F_y=0$.

$$DI = R-(\overset{0}{\cancel{c}}+2) = 4-(0+2) = 2$$

پس این سازه دو درجه‌ی نامعینی دارد. (یعنی برای یافتن مجهول‌ها نیاز به ۲ معادله‌ی اضافه دیگر که معادله سازگاری داریم.)

مرحله‌ی دوم: با توجه به اینکه درجه‌ی نامعینی ۲ می‌باشد، باید ۲ قید را آزاد کنیم و به جای آن نیرو بگذاریم. بعد به کمک آن نیروها سازه را تحلیل کنیم. با حذف این ۲ قید (تکیه‌گاه) سازه‌ای معین خواهیم داشت که به تحلیل آن می‌پردازیم.

به این منظور تکیه‌گاه‌های B و C را حذف می‌کنیم و به جای آن R_B و R_C را قرار می‌دهیم.



با حذف تکیه گاه های B و C و فرض جای گزینی این تکیه گاه ها با R_B و R_A (که معلوم خواهند شد یعنی بدست خواهند آمد.) تیر ما فقط یک تکیه گاه گیردار در A دارد و این تکیه گاه گیردار دو مجهول M_A و R_A دارد و چون معادلات تعادل ۲ تا است $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma M_a = 0$ ، پس سازه دیگر نامعین نخواهد بود.

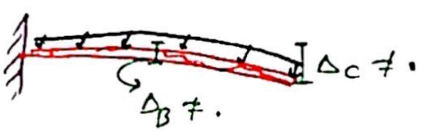
البته فرض های بالا درصورت داشتن مقادیر R_B و R_C است وگرنه اگر آنها نیز مجهول باشند سازه همان سازه ی ابتدایی صورت سوال است که ۲ درجه نامعینی دارد.

حال در مراحل بعد تلاش می کنیم با توجه به اطلاعاتی که از خود صورت سوال استخراج می کنیم R_B و R_C را بدست آوریم.

مرحله ی سوم: در تیر اصلی به دلیل وجود تکیه گاه در نقاط B و C ، در این ۲ نقطه جابه جایی قائم نداریم و می توانیم بنویسیم: جابه جایی قائم در این ۲ نقطه صفر است.

$\Delta y_B = 0$ $\Delta y_C = 0$

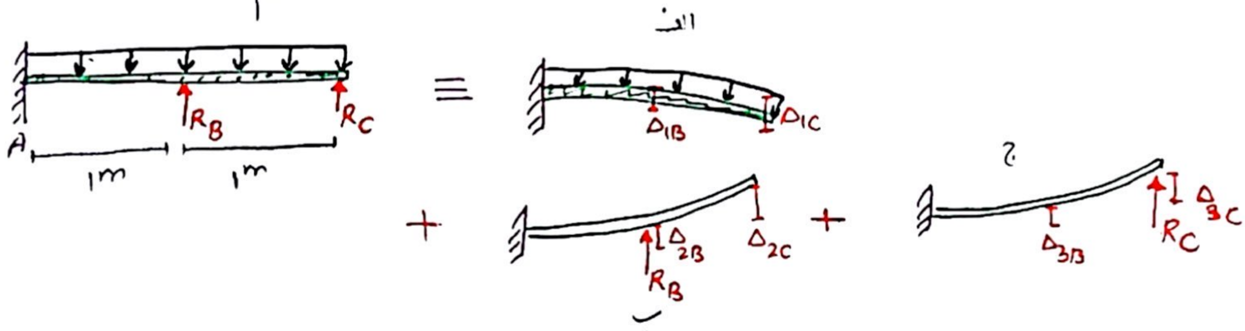
دو رابطه ی فوق به معادلات سازگاری معروفند. به این معنا که اگر تکیه گاه ها را حذف کنیم (منظور B و C است) و شرط نگذاریم (را نگذاریم $\Delta y_B = 0$ و $\Delta y_C = 0$) متصور است که تیر ما که حال فقط تکیه گاه گیردار A را فقط دارد درست است که معین و پایدار است ولی بدون شرط: $\Delta_B = 0$ و $\Delta_C = 0$ بر اثر نیروی q دارای Δ_B و Δ_C غیر صفر خواهد بود که این تیری که Δ_B و Δ_C ای غیر صفر دارد با شرایط ابتدایی صورت سوال که در این ۲ نقطه جابه جایی نداشت متفاوت است.



۱۰/۲

پس باید $\Delta_B=0$ و $\Delta_C=0$ را به عنوان ۲ معادله‌ی بسیار مهم در نظر بگیریم.

مرحله‌ی چهارم: در این گام با استفاده از روابط خیز که در تحلیل سازه‌ی ۱ آموختیم، Δ_B و Δ_C را می‌یابیم و بعد به سراغ R_B و R_C می‌رویم.



داریم:

$$\begin{cases} \Delta_{1B}+\Delta_{2B}+\Delta_{3B}=0 \\ \Delta_{1C}+\Delta_{2C}+\Delta_{3C}=0 \end{cases}$$

الف) $$\Delta_{1B}=\frac{q(1)^4}{8EI}+\frac{q(1)(1)^3}{3EI}+\frac{\frac{q(1)^2}{2}\times(1)^2}{2EI}=\frac{q}{8EI}+\frac{q}{3EI}+\frac{q}{4EI}=\frac{17q}{24EI}$$

$$\Delta_{1C}=\frac{q(2)^4}{8EI}=\frac{2q}{EI}$$

حرس ا

ب) $\Delta_{2B} = \dfrac{-R_B (1)^3}{3EI}$

$$\Delta_{2C} = \Delta_{2B} + \theta_{2B} \times L = \frac{-R_B}{3EI} - \frac{R_B (1)^2}{2EI} \times 1 = -\frac{5}{6} \frac{R_B}{EI}$$

پ) $\Delta_{3B} = \dfrac{-R_C \times 1^3}{3EI} + \dfrac{-R_C (1)^2 (1)^2}{2EI} = -\dfrac{5}{6} \dfrac{R_C}{EI}$

$$\Delta_{3C} = -\frac{R_C (1)^3}{3EI}$$

$$\begin{cases} \Delta_{1B} + \Delta_{2B} + \Delta_{3B} = 0 \rightarrow \dfrac{17q}{24EI} + \dfrac{-R_B}{3EI} - \dfrac{5}{6}\dfrac{R_C}{EI} = 0 \\ \Delta_{1C} + \Delta_{2C} + \Delta_{3C} = 0 \rightarrow \dfrac{2q}{EI} + \dfrac{-5R_B}{6EI} - \dfrac{R_C}{3EI} = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\times 6EI]{\times 24EI} \begin{cases} 17q - 8R_B - 20R_C = 0 \\ 12q - 5R_B - 2R_C = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 17q - 8R_B - 20R_C = 0 \\ \times(-10) \quad -120q + 50R_B + 20R_C = 0 \end{cases}$$

$$-103q + 42R_B = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{103}{42} q \longrightarrow$$

$$12q - 5\left(\frac{103}{42} q\right) - 2R_C = 0$$

$$\longrightarrow R_C = \frac{11q}{84}$$

4

تمرین ۱

روش‌های سختی در تحلیل سازه‌های نامعین

روش شیب افت

به طور کلی تحلیل سازه‌های نامعین به دو روش کلی نیرو (نرمی) و تغییرمکان (سختی) امکان‌پذیر است.

در قسمت قبل درباره‌ی روش نیرو بحث شد.

در این بحث به یکی از روش‌های سختی به نام شیب افت می‌پردازیم. لازم به ذکر است که به ۲ روش سختی دیگر به نام‌های روش پخش لنگر و روش کانی نیز خواهیم پرداخت.

در اینجا ابتدا با مقدمات روش شیب افت به اسم درجه‌ی آزادی و مفاهیم آن می‌پردازیم، سپس خود روش شیب افت را مطرح می‌کنیم.

- درجه آزادی

در روش‌های تغییرمکان برای حل یک سازه‌ی نامعین، همان‌گونه که از نام روش معلوم است، تغییرمکان‌های گره‌های سازه به‌عنوان مجهولاتِ حل درنظر گرفته می‌شود.

به مجموع تعداد دوران‌ها و تغییرمکان‌های مستقل یک سازه برای مشخص کردن وضعیت تغییرشکل سازه، درجه‌ی آزادی آن می‌گوییم. به صورت دقیق‌تر می‌توان گفت که:

درجه‌ی آزادی یک سازه معادل با مجموع درجات آزادی دورانی و انتقالی در سازه می‌باشد.

ابتدا درجه‌ی آزادی دورانی را بررسی می‌کنیم:

۱) اگر مدل گیردار به تکیه‌گاه وصل شدیم $n_\theta = 0$ ، ← درجه‌ی آزادی دورانی

گیردار: اجازه‌ی چرخش ندارد، آزادی ندارد که بچرخد و زاویه‌ی دلخواه انتخاب کند و همیشه $\theta = 90°$.

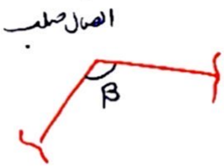
البته گیردار می‌تواند زیر شکل باشد. باز هم $n_\theta = 0$.

همیشه ثابت است.

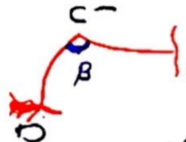
نمی‌تواند برای بار زاویه‌ی دلخواه بگیرد.

در واقع درجه‌ی آزادی صفر است یعنی اجازه چرخش ندارد.

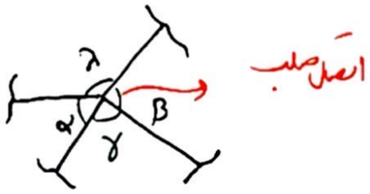
۲) در محل اتصال پیوسته دو و یا چند عضو به یکدیگر، $n_\theta = 1$.



چون اتصال صلب است همواره زاویه‌ی بین دو عضو ثابت است (β)، اما دقت داریم که چون اعضای متصل به joint صلب نیستند و سختی خمشی (EI) در آنها مساوی بی‌نهایت نیست، می‌توان اعضا کمی می‌توانند بچرخند. اما به هر حال



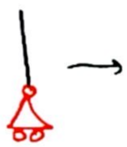
زاویه‌ی بین آنها β می‌ماند در واقع می‌توانیم تصور کنیم که اگر AC را اجازه‌ی چرخش دهیم قطعاً CD به تبع آنها می‌چرخد طوری که زاویه‌ی بین آنها β بماند پس عملاً یک درجه‌ی آزادی چرخشی داریم. $n_\theta = 1$



$n_\theta = 1$

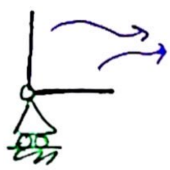
طبق توضیح روبرو چون زاویه‌ی بین اعضا در اتصال صلب حفظ می‌شود پس اگر یکی از اعضا مثلاً AO را اجازه چرخش بدهیم (عضو AO صلب نیست) بقیه اعضا که صلب نیستند با حفظ زاویه‌ی بین خود می‌چرخند پس کلاً گویا یکی از اعضا فقط آزادی چرخشی دارند.

۳) اتصال عضو پیوسته با یک عضو به تکیه‌گاه ساده (یعنی تکیه‌گاه‌ای مثل مفصلی و غلتکی) چون اجازه‌ی چرخش می‌دهد.



← بعد از اعمال بار به هر زاویه‌ای که بخواهد می‌چرخد.

۴) حالت‌های دیگر مثلاً دو عضو جدا به یک تکیه‌گاه مفصلی وصل باشند هر کدام جداگانه می‌توانند به زاویه‌ی دلخواه خود بچرخند.



هر کدام به اندازه‌ی لازم خود می‌توانند بچرخند.

- درجه ی آزادی انتقالی :

تعداد تغییر مکان های مستقل یک سازه، درجه ی آزادی انتقالی آن سازه نامیده می شود.

در بحث درجه ی آزادی دورانی معنی مستقل را دیدیم مثلاً اینجا دیدیم که اتصال

با اینکه دو عضو دارد و هر کدام از اعضا می توانند انحنا بگیرد اما چون اتصال صلب است اگر یکی چرخش بگیرد با حفظ زاویه ی B مجبور به چرخش است و آزادی و اختیاری از خود ندارد.

حال با تسلط به بحث استقلال اعضا از یکدیگر یا وابسته بودن آنها به درجه ی آزادی انتقالی می پردازیم.

برای تعیین درجه ی آزادی یک سازه در روش شیب افت مراحل زیر را طی می کنیم :

1. کلیه ی اعضا را در انتهای خود مفصلی می کنیم تا سازه به یک خرپا تبدیل شود.

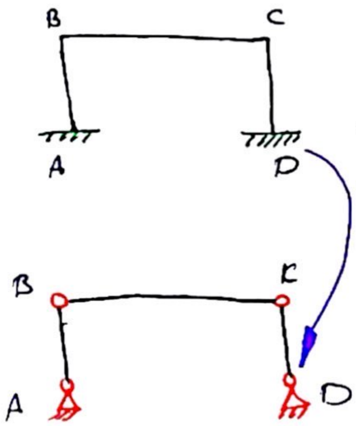
2. با بررسی وضعیت ایستایی خرپای حاصل، در صورت پایدار بودن، سازه فاقد درجه ی آزادی انتقالی بوده و در صورت ناپایدار بودن خرپا، در سازه ی اصلی، درجه ی آزادی انتقالی وجود خواهد داشت.

3. درجه ی آزادی انتقالی سازه برابر با حداقل میله های (عضوهای) مورد نیاز / یا حداقل عکس العمل های تکیه گاهی مورد نیاز برای پایداری سازه ی خرپایی حاصل خواهد بود.

مثال 7: درجه آزادی انتقالی و دورانی را در هر یک از سازه های زیر بیابید.

الف)

حل: برای آزادی انتقالی همه ی Joint ها را مفصل قرار می دهیم.

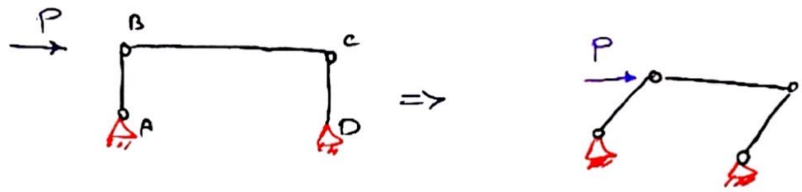


توجه داریم که در گیردار اگر دوران را آزاد کنیم تبدیل به تکیه گاه مفصلی می شود.

خرپا الان را بررسی می کنیم. اگر نیروی افقی بر نقطه ی B وارد شود سازه شروع به حرکت می شود و ناپایدار است.

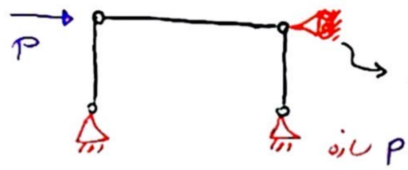
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner



زیرا در جهت افقی مقاومتی وجود ندارد.

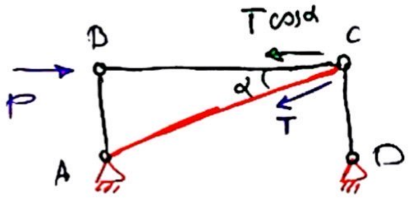
حال اگر فقط یک تکیه‌گاه غلتکی در نقطه‌ی C قرار داده شود جلوی حرکت افقی گرفته می‌شود.



این تکیه‌گاه که جدید گذاشتیم باعث پایداری شد. در اثر بار P → سازه حرکت افقی ندارد.

البته از ابتدا سازه در برابر بارهای قائم به دلیل تکیه‌گاه‌های A و D پایدار بود.

اکنون نتیجه می‌گیریم که چون فقط یک تکیه‌گاه غلتکی نیاز داریم تا سازه پایدار شود پس $n_\Delta = 1$ ← درجه‌ی آزادی انتقالی



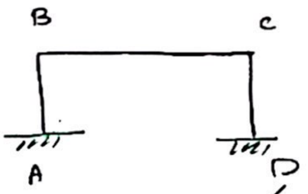
روش دوم درجه‌ی آزادی انتقالی: دیدیم سازه در برابر بار P → ناپایدار است. اکنون ببینیم با اضافه کردن چند میله (المان خرپایی) پایدار می‌شود.

اگر عضو AC را به این سازه اضافه کنیم می‌بینیم که این عضو جلوی حرکت افقی سازه را می‌گیرد.

درواقع عضو AC با کشیده شدن و مقاومت در برابر حرکت افقی این کار را می‌کند. درواقع مولفه‌ی $T\cos\alpha$ ← با نیروی P → مقابله می‌کند و از ناپایداری و fail کردن سازه جلوگیری می‌کند و سازه پایدار می‌شود. این اتفاق دقیقاً همان چیزی است که بادبندها (عضو ضربدری شکل بالا) در سازه‌های فولادی در مقابل نیروی زلزله (P →) که نیروی افقی است مقاومت می‌کنند.

پس چون تنها با اضافه کردن یک عضو توانستیم پایداری سازه‌ی مفصلی شده را حفظ کنیم درجه‌ی آزادی انتقالی سازه اصلی برابر یک بوده است. $n_\Delta = 1$

درجه ی آزادی دورانی :

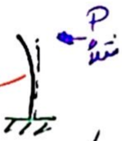


در نقاط A و D تکیه گاه گیردار است. پس (در آنها) آزادی دورانی نداریم.

در نقطه C زاویه ی بین دو عضو 90° است و چون اتصال صلب است تا بعد از بارگذاری هم این زاویه 90° می ماند.

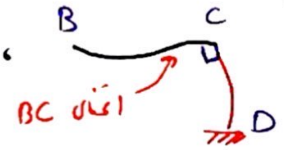
اما عضو CD و عضو CB صلب نیستند و سختی خمشی EI غیر بی نهایت دارند.

یعنی عضو CD بر اثر بار افقی یا بار دیگری انحنا می گیرد مثلاً



انحنا در اثر بارگذاری مثلاً $\xleftarrow{P}$ یا بارگذاری های دیگر!

همچنین عضو BC نیز بر اثر بار و چرخش اعضای دیگر انحنا می گیرد



، اما به دلیل اینکه اتصال صلب است می توان گفت که هر چقدر CD بچرخد، قطعاً CB به فاصله ی 90° از آن (با دوران) قرار می گیرد و آزادی و اختیاری برای دوران خود ندارد. پس می توان گفت CD آزادی دورانی دلخواه دارد (مستقل) و CB آزادی دورانی وابسته دارد. (البته برعکس هم می توان گفت یعنی CB مستقل آزادی دورانی دارد و CD گردان وابسته دارد)

در نتیجه این گره یک درجه آزادی دورانی دارد.

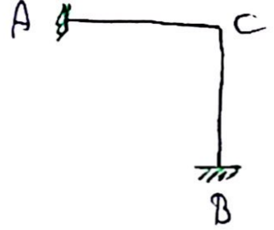
با همین توضیحات گره B نیز یک درجه آزادی دورانی دارد.

پس در کل سازه مجموع آزادی دورانی ها = 2 می باشد.

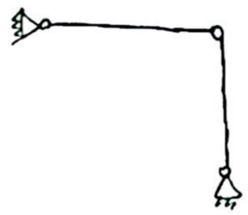
تکیه گاه گیردار   تکیه گاه گیردار

$$n_\theta = \overset{0}{n\theta_D} + \overset{1}{n\theta_C} + \overset{1}{n\theta_B} + \overset{0}{n\theta_A} = 2$$

ب)

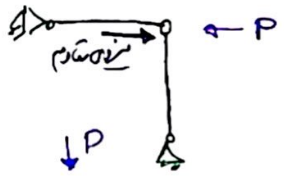


برای بررسی درجه‌ی آزادی انتقالی همه‌ی اتصالات را مفصلی قرار می‌دهیم.

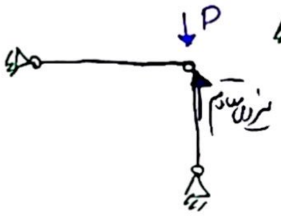


اکنون مشخص است که سازه‌ی فوق از هر طرف نیرو وارد شود پایدار است و حرکتی ندارد.

چه از جانب نیرو وارد شود:



چه از بالا نیرو وارد شود:



پس چون پایدار است $\Longleftarrow$ $n_\Delta = 0$

جهت بررسی درجه آزادی دورانی: گره به گره بررسی می‌کنیم. A و B تکیه‌گاه گیردار هستند پس آزادی دورانی ندارند. گره C، اتصال صلب است اما دو عضو متصل به آن انعطاف‌پذیر (انحناپذیر) هستند.

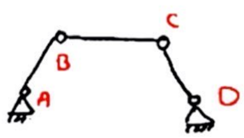
قبلاً بررسی شد که این نوع گره یک درجه آزادی دارد.

پس در کل $n_\theta = 1$

اگر مجموع درجات آزادی را در کل بخواهیم داریم:

$$n_\Delta + n_\theta = 0 + 1 = \boxed{1}$$

پ) برای تعیین درجه‌ی آزادی انتقالی، گره‌ها و تکیه‌گاه‌ها را مفصلی می‌کنیم ←



برای پایدار کردن سازه باید یک تکیه‌گاه ساده در نقطه‌ی B یا C قرار دهیم که با این تکیه‌گاه پایدار می‌شود.

چون فقط یک تکیه‌گاه برای پایدار کردن لازم است پس $n_\Delta = 1$؛ (درجه‌ی آزادی انتقالی، یک است.)

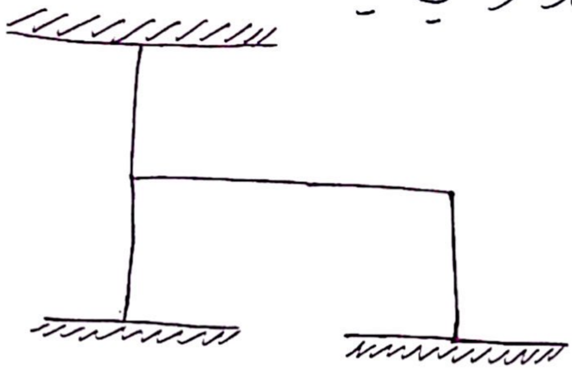
موضوع : درجه ی آزادی انتقالی

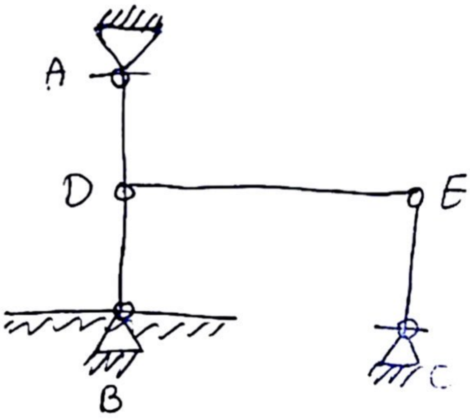
نام : محمد حسین آمری فرد

نام درس: تحلیل سازه ۲ / استاد: دکتر سجاد میرزا محمدی / شماره دانشجویی ۹۸۴۴۳۰۰۰۱۰۰

صفحه ۱۲ جزوه

تمرین ۲: درجه ی آزادی انتقالی این سازه را تعیین کنید.

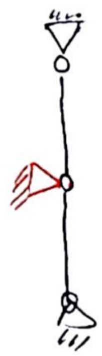




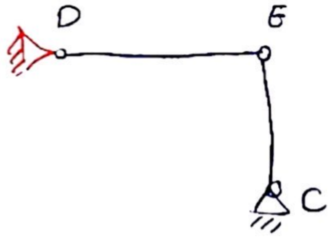
ابتدا تمام تکیه گاه های گیردار را مفصلی می‌کنیم و سپس تمام گره های سازه را نیز مفصلی قرار می‌دهیم.

همان طور که می‌بینیم سه گره مفصلی A و B و D روی یک خط مستقیم قرار دارند:

پس ناپایدار است و در جهت عمود بر عضو در نقطه ی D نیاز به support دارد پس در نقطه ی D، یک تکیه گاه مفصلی در راستای DE قرار می‌دهیم.



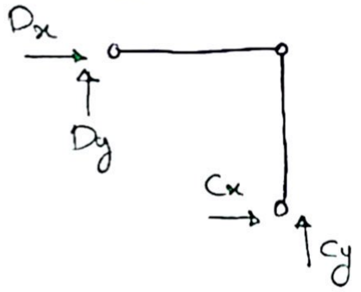
تمرین ۲



اکنون به سراغ قسمت دیگر سازه برویم.

تکیه‌گاه D را که در مرحله‌ی قبل اضافه کردیم

این قسمت ۴ تا Reaction تکیه‌گاهی دارد که نیروهای آنها هم رس نیستند.



و یک مفصل داخلی دارد $\boxed{C=1}$.

و سه مفصل موجود در شکل روبرو هم روی یک خط نیز نیستند. پس با توجه به

$$DI = R-(C+3) = 4-(1+3) = 0$$

سازه معین و پایدار است.

پس در کل همان یک تکیه‌گاه کافی بود.

پس درجه آزادی انتقالی سازه ۱ بوده است.

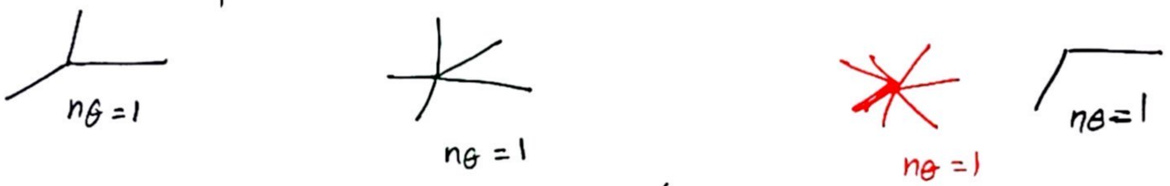
تمرین ۲

نتیجه‌گیری کلی در روش سریع برای n_θ :

۱. ابتدا تکیه‌گاه‌های گیردار را حذف می‌کنیم. (چون هیچ‌کدام آزادی دورانی ندارند.)

2. در هر مفصل داخلی به تعداد اعضای متصل به آن درجه آزادی دورانی داریم.

3. به ازای هر اتصال صلب، گره غیر مفصلی بین اعضا، ۱ درجه آزادی دورانی داریم.



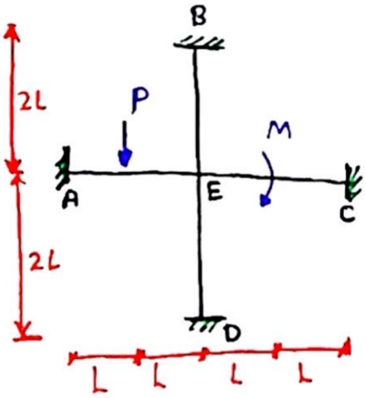
4. همه n_θ های بدست آمده را باهم جمع می‌کنیم تا n_θ کل بدست آید.

انتخاب بین روش‌های نرمی و سختی!

کدام بهتر است؟ با بررسی مثال ذیل مطلوب روشن می‌شود.

مثال 8: برای حل سازه‌ی مقابل، استفاده از روش نرمی (نیرو) را توصیه می‌کنید یا روش تغییر مکان (سختی)؟

علت را توضیح دهید. (EI ثابت است)

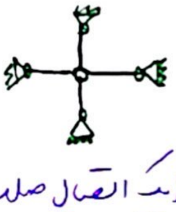


تعداد تکیه‌گاه گیردار

$$D.I = \underbrace{3\times 4}_{R} - (\underset{0}{\cancel{c}}+3) = 9$$

تعداد مجهولات در روش نیرو:

9 درجه نامعینی پس 9 مجهول!

تعداد مجهولات در روش سختی: اگر گره‌ها مفصلی باشد  سازه در اثر هیچ نیرویی حرکتی نخواهد داشت: $\Delta_{همه}=0$

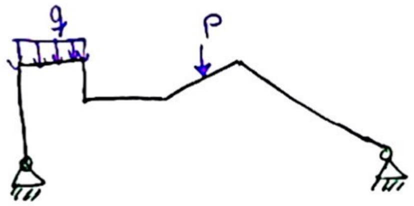
$n_\Delta=0$، n_θ: چون همه تکیه‌گاه‌ها گیردار است و فقط یک اتصال صلب E دارد پس $n_\theta=1$.

پس در مجموع درجه آزادی $n = 1$ دارد. یعنی فقط یک مجهول.

بدیهی است و بسی واضح که استفاده از روش سختی با یک مجهول بسیار بسیار بسیار ساده‌تر است از حل نه معادله نه مجهول از روش نرمی!

کلاً می‌توان نتیجه گرفت اگر در سازه‌ای تعداد مجهولات تکیه‌گاهی زیاد بود (تکیه‌گاه‌ها از ۲ تا بیشتر بود و یا تکیه‌گاه گیردار از ۲ تا به بالا داشت.) معمولاً روش‌های سختی بهتر است.

و اگر در سازه‌ای تعداد مجهولات تکیه‌گاهی کم بود اما شکل سازه دارای گره‌ای زیاد بود، روش نیرو بهتر است.



گره‌ای زیاد،
مجهول تکیه‌گاهی $= 4$.

$DI = 4 - 3 = 1$

مجهول تکیه‌گاهی کم است پس روش‌های نیرو مناسب‌تر است.

آشنایی با مفاهیم روش شیب - افت :

روش شیب افت، از روش های نسبتاً ساده‌ای محسوب می‌شود که در آن لنگرای دو انتهای هر یک از اعضای سازه، به صورت تابعی از دوران در ابتدا و انتهای عضو، (θ_i و θ_j)، دوران محور عضو (ψ) و بارگذاری روی عضو (FEM) نوشته می‌شود.

نکات مهم :

۱. در این روش، تنها اثر تغییر شکل خمشی در اعضا در نظر گرفته می‌شود یعنی از اثر تغییر شکل محوری و برشی اعضا صرف نظر می‌شود. البته این موضوع به معنای نادیده گرفتن نیروی محوری و برشی در اعضا نمی‌باشد.

۲. تعداد مجهولات در روش شیب افت، برابر مجموع تعداد درجات آزادی دورانی و انتقالی در سازه می‌باشد.

بررسی روابط اصلی شیب افت :

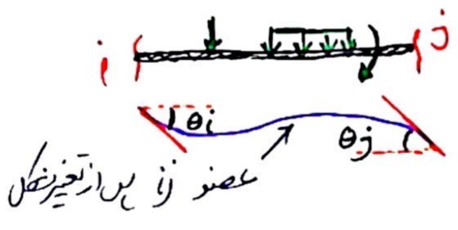
در شکل زیر عضو ij را از ~~عضو~~ داخل یک سازه بیرون آورده‌ایم. مطابق روابط شیب افت، لنگر M_{ij} (لنگر در نقطه i از عضو ij) و لنگر M_{ji} (لنگر در نقطه j از عضو ij) برابر است با :

$$M_{ij} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij}\right) + FEM_{ij}$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_j + \theta_i - 3\psi_{ij}\right) + FEM_{ji}$$

در این رابطه لنگرای M_{ij} و M_{ji} در جهت ساعتگرد، مثبت فرض می‌شوند. برای درک بهتر پارامترای موجود در این رابطه به موارد زیر توجه شود :

۱. θ_i و θ_j دوران گره‌های i و j می‌باشند که در جهت ساعتگرد، مثبت فرض می‌شوند.



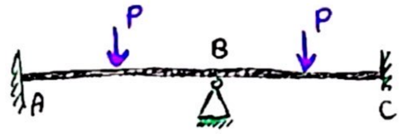
ساعتگرد درجهت

پس θ_i مثبت است!

مثلاً

ساعتگرد درجهت، پس θ_j نیز مثبت است.

چند نمونه از موارد به کاربرد دوران را در زیر می‌آوریم:



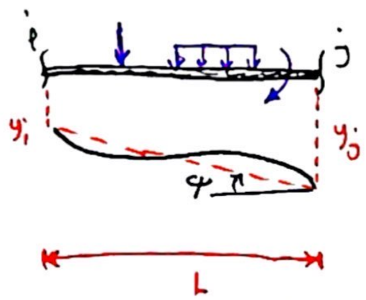
$\theta_A = 0$ گیردار

$\theta_B \neq 0$ [illegible]

$\theta_C = 0$ گیردار

۲. ψ چرخش محور اصلی عضو است. (خط چینی که از i به j وصل شده است، محور اصلی نام دارد) که در شکل زیر نشان داده شده است.

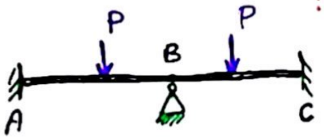
اگر چرخش عضو در جهت ساعتگرد باشد، علامت ψ مثبت و اگر چرخش عضو در جهت پادساعتگرد باشد، علامت آن منفی است.



$$\psi_{ij} = \psi_{ji} = \psi = \frac{y_j - y_i}{L}$$

در واقع چرخش انتها نسبت به ابتدا را ψ می‌نامیم. مثلاً عضو ij افقی بوده است و اکنون پس از بارگذاری عضو شیب‌دار شده است. این تغییر شیب از صفر به یک شیب معین را ψ می‌نامیم.

چند نمونه از مواردی که در سؤالات زیاد مشاهده می‌شود، برای درک بهتر می‌آوریم:

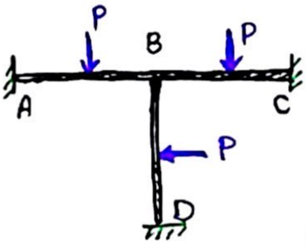


به دلیل وجود تکیه‌گاه‌ها نقاط A و B و C امکان حرکت قائم ندارد، پس عضو بدون تغییر شیب، افقی می‌ماند. پس:

$y_A = 0$ و $y_B = 0$ و $y_C = 0$ $\leftarrow \psi$

$\psi_{AB} = 0$ و

$\psi_{BC} = 0$

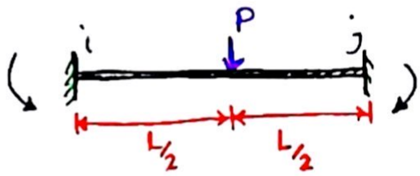


با توجه به تکیه‌گاه‌های سازه و صرف نظر کردن از تغییر شکل‌های محوری، نقاط A، B، C و D در راستای قائم و افقی تغییر مکانی ندارند و ψ در همه‌ی اعضا صفر است.

$$\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{BD} = 0$$

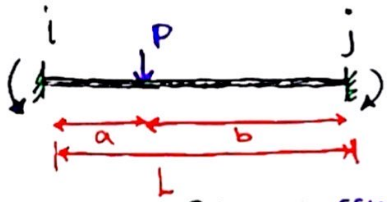
۳. در روابط فوق، FEM معادل لنگر دو سر عضو ناشی از بارگذاری روی آن، با فرض گیردار بودن ابتدا و انتهای عضو می‌باشد. برای حل مسائل، مقادیر FEM در حالات بارگذاری مختلف نشان داده شده است که لزوماً باید آن‌ها را به خاطر بسپارید.

دقت شود که لنگرهای FEM زمانی مثبت می‌باشند که در جهت ساعتگرد باشند و بالعکس.

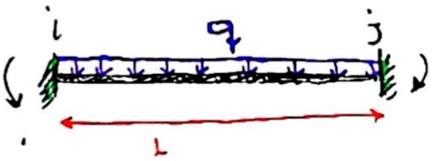


$$FEM_{ij} = -\frac{PL}{8}$$

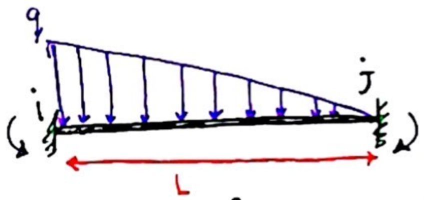
$$FEM_{ji} = +\frac{PL}{8}$$



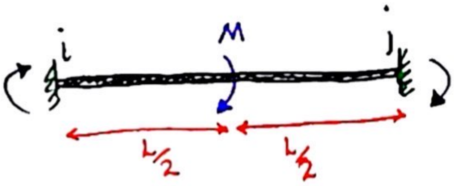
$$FEM_{ij} = -\frac{Pab}{L} \times a/L \quad , \quad FEM_{ji} = +\frac{Pab}{L} \times \frac{a}{L}$$



$$FEM_{ij} = \frac{-qL^2}{12} \qquad FEM_{ji} = \frac{qL^2}{12}$$



$$FEM_{ij} = \frac{-qL^2}{20} \qquad FEM_{ji} = +\frac{qL^2}{30}$$

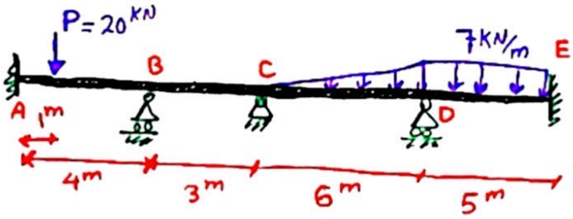


$$FEM_{ij} = +\frac{M}{4} \quad , \quad FEM_{ji} = \frac{+M}{4}$$

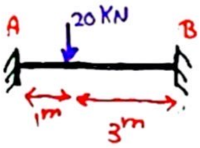
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

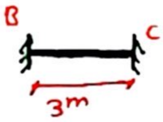
مثال ۹ : با توجه به FEM های صفحه‌ی قبل، مقادیر FEM در محاسبه‌ی لنگرهای انتهایی اعضا را بدست آورید.



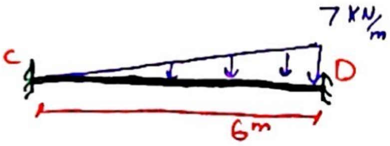
تیر را به صورت قطعه قطعه جدا می‌کنیم از تکیه‌گاه‌ها و دو سر هر قسمت جدا شده را گیرداری کنیم.



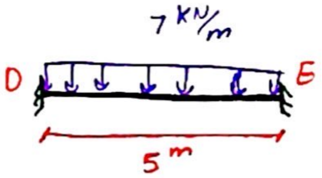
$$FEM_{AB} = \frac{20\times1\times3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{180}{16} \qquad FEM_{BA} = \frac{20\times1\times3}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{60}{16}$$



هیچ باری در این قسمت نیست $\Rightarrow FEM_{BC} = 0 \qquad FEM_{CB} = 0$



$$FEM_{CD} = \frac{-(7)(6)^2}{30} = -\frac{252}{30} \qquad FEM_{DC} = \frac{7(6)^2}{20} = \frac{252}{20}$$



$$FEM_{DE} = \frac{-(7)(5)^2}{12} = \frac{-175}{12} \qquad FEM_{ED} = \frac{7(5)^2}{12} = \frac{175}{12}$$

موضوع: تحلیل تیر به روش شیب افت

محمدحسین آمری فرد

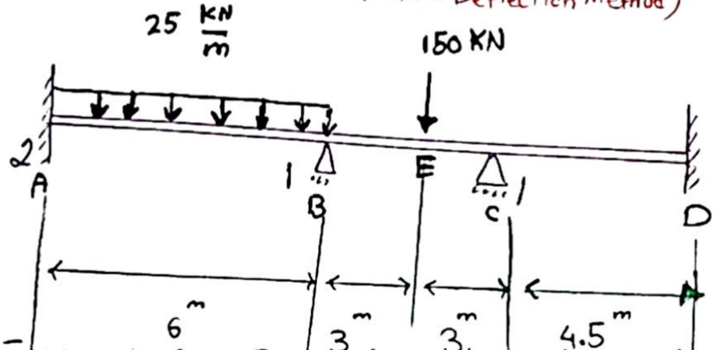
شماره‌ی دانشجویی: ۹۸۴۴۳۰۰۱۰۰

استاد: دکتر سید مسعود سجادی

نمره ۱۸ جزوه

تمرین ۳: تیر نشان داده شده در شکل زیر را به روش شیب افت تحلیل کنید.
(Slope - Deflection Method)

(قسمت BC و CD انجام شود.)



R: 6

DI = R - (2 + c)

DI = 6 - (2 + 0) = 4

درجه نامعین است. ما باید معادلاتی به این سؤال اضافه کنیم که معادلات ما برابر با تعداد کل مجهولات شود تا بتوانیم مجهول‌ها را بدست بیاوریم. این معادلات از روابط شیب افت بدست می‌آید که بعضی از مجهول‌ها را معلوم کرده، به سمت حل پیش می‌رویم و سؤال را حل می‌کنیم.

حل: و جابه‌جایی که ۲ سر عضو دارد نسبت به طول عضو (۴). شیب افت رابطه‌ای است بین لنگری که بر عضو وارد می‌شود (سر عضو)، چرخشی که عضو در ۲ سر خود دارد. (۵)

گام اول: ابتدا تیر را به ۳ قسمت تقسیم می‌کنیم: AB و BC و CD. مبنای این تقسیم

تکیه‌گاه‌ها هستند یعنی بین هر دو قسمت یک تکیه‌گاه است به بیان بهتر بین هر دو تکیه‌گاه را یک

قسمت در نظر می‌گیریم. پس از تقسیم کل تیر به ۳ قسمت باید دو انتهای هر قسمت را گیردار فرض کنیم.
چرا که از بین تکیه‌گاه‌ها تنها گیردار است که می‌تواند با لنگر ایجاد شده توسط بارهای روی عضو مقابله کند.

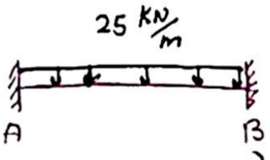
در هر قسمت با توجه به باری که روی آن قرار داد (بار نقطه‌ای، بار گسترده یا لنگر) و با استفاده از

جدول‌هایی که لنگر دو سر انتهایی را با استفاده از رابطه‌ای تحلیل سازه به ما می‌دهد لنگرهای

انتهایی را بدست می‌آوریم. به این لنگرها اصطلاحاً FEM (Fixed End Moment)

می‌گوییم.

عضو AB



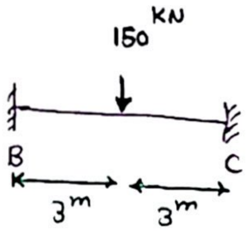
در تیر اصلی سؤال در نقطه‌ی B تکیه‌گاه ساده داشتیم

تمرین ۳: ... بنابراین همیشه در سر نقطه‌ی حل شده را تکیه‌گاه گیردار فرض می‌کنیم.

با استفاده از روابط تحلیل سازه‌ی ۱ و جداول بدست آمده (مثلاً در کتاب سری عمران جلد دوم تحلیل سازه، ص 158) در این حالت لنگرهای زیر را داریم:

$$FEM_{BA} = -FEM_{AB} = \frac{\underbrace{w}_{\text{بار گسترده}}\underbrace{L^2}_{\text{طول تیر}}}{12} = \frac{(25^{\frac{kN}{m}})(6^{2\,m^2})}{12} = 75 \ kN.m$$

BC عضو :



(دو سر را گیردار فرض می‌کنیم)

$$FEM_{CB} = FEM_{BC} = \frac{PL}{8} = \frac{(150^{kN})(6^{m})}{8} = 112.5 \ kN.m$$

CD عضو :

$$FEM_{CD} = FEM_{DC} = 0$$

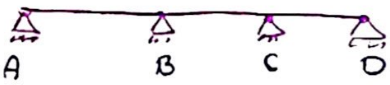
* هیچ باری روی تیر قرار ندارد، قاعدتاً لنگر در دو انتها، صفر است.

گام دوم: درجات آزادی انتقالی و دورانی:

ابتدا به بررسی درجه‌ی آزادی انتقالی می‌پردازیم. برای این کار باید بررسی کنیم آیا تک‌تک نقاط امکان جابه‌جایی (Δ) دارند یا خیر.

برای این کار در طول تیر هرچه تکیه‌گاه هست همه را به صورت تکیه‌گاه مفصلی فرض می‌کنیم و سپس بررسی می‌کنیم آیا سازه پایدار هست یا خیر؟

تمرین ۳:



این سازه در این حالت پایدار است و

نیاز به هیچ تکیه‌گاه دیگری ندارد.

پس درجه‌ی آزادی انتقالی برابر صفر است.

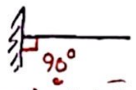
به عبارت دیگر در این سازه در نقاط A و B و C و D ، هیچ تغییر مکانی نخواهیم داشت.

به این دلیل که در واقع همه‌ی نقاط مذکور به یک تکیه‌گاه وصلند و نمی‌توانند جابه‌جا شوند.

درجه‌ی آزادی دورانی : به ۲ روش مفهومی و جدولی می‌توانیم پیش برویم :

۱. مفهوم : در دو نقطه‌ی A و D تکیه‌گاه گیردار است  پس در این ۲ نقطه

قبل و بعد بارگذاری تغییر در محل اتصال تیر به تکیه‌گاه از نظر زاویه وجود ندارد.



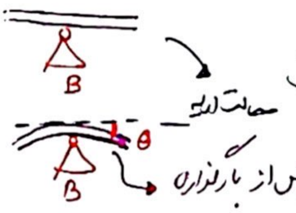
قبل بارگذاری

بعد بارگذاری

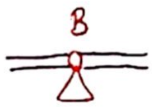
یعنی ما θ (زاویه) بین تیر در حالت اول (قبل بارگذاری) و تیر در حالت دوم (بعد بارگذاری)، نداریم.

پس این نقطه A (و همچنین D) هیچ درجه‌ی آزادی دورانی ندارند.

در ۲ نقطه‌ی B و C ، تیر پیوسته روی تکیه‌گاه قرار گرفته است.

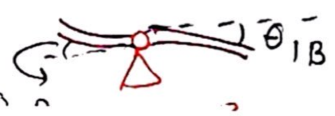


لذا بر اثر بارگذاری ممکن دارای انحنا و چرخش نسبت به حالت اولیه باشد.

لازم به ذکر است که اگر اتصال به این صورت 

فرض شود، یعنی تیر را پیوسته در نظر نگیریم

بدیهی است که θ در سمت چپ B با θ در سمت راست B نسبت به هم مستقلند و در این

نوع نقطه ۲ درجه‌ی آزادی دورانی داریم. 

و θ_{1B} و θ_{2B} هیچ ربطی ؛

تمرین ۳

نخواهد داشت. مثلاً یکی از آنها می‌تواند $1°$ نسبت به حالت اولیه (افقی) تیر بچرخد و در همین حال ممکن است $\theta_{2B} = 0/5°$ باشد. پس هر طرف بسته به بارگذاری خودش زاویه‌ی چرخش خودش را دارد.

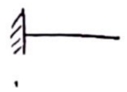
پس با توضیحات فوق ملاحظه می‌شود که از چهار نقطه A و B و C و D، دو نقطه‌ی θ_A و θ_D دوران برابر صفر دارند و دوران دو نقطه C و B مجهولات و صفر نیست. $\theta_B \neq 0$ و $\theta_C \neq 0$.

$\Downarrow$

2 درجه آزادی دورانی

۲. با استفاده از جداول: (مثلاً جدول ص ۱۵۴ و ص ۱۵۵ جلد ۲ کتاب تحلیل سازه‌ی سری عمران)

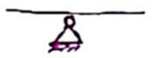
* این حالت را در جدول درجه‌ی آزادی صفر دارد.



$n_\theta = 0$

نقاط A و D به این شکل هستند.

* حالت تیر پیوسته روی تکیه‌گاه مفصلی نیز دارای درجه‌ی آزادی دورانی یک است.



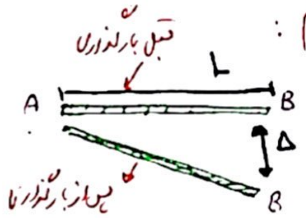
$n_\theta = 1$

نقاط B و C به این صورت است.

تعریف ψ_{AB} (زاویه‌ی AB): اگر تیر را قبل از بارگذاری به صورت افقی فرض کنیم.

و تیر بعد از بارگذاری به صورت

باشد. داریم:



می‌بینیم که تیر به صورت ساعتگرد چرخش کرده است.

طول تیر L باشد و جابه‌جایی عمودی Δ باشد. ψ به صورت تقسیم Δ بر L تعریف می‌شود:

$$\psi_{AB} = \frac{\Delta}{L}$$

در واقع ψ همان شیب است. اگر ساعتگرد تیر چرخش کرده بود ψ، مثبت است و اگر پادساعتگرد چرخش کرده بود ψ، منفی است.

تمرین ۳

گام دوم : رابطه‌ی شیب افت :

$$M_{AB} = \frac{2EI}{\underset{6}{L_{AB}}}\left(2\cancel{\theta_A}^{\,0} + \theta_B - 3\cancel{\psi_{AB}}^{\,0}\right) + FEM_{AB}$$

$FEM_{AB} \rightarrow (-75\ \text{kN.m}) \rightarrow$ (محاسبه در صفحه‌ی ۲)

در رابطه‌ی بالا $\theta_A = 0$ است (دیدیم که A اتصال گیردار دارد و یافتیم که $\theta_A = 0$ است.)

θ_B مجهول بود؛ و چون نه نقطه A جابه‌جایی‌ای دارد ($\Delta = 0$) و نه نقطه‌ی B ($\Delta = 0$) پس $\psi_{AB} = 0$.

$$\rightarrow M_{AB} = \frac{EI\theta_B}{3} - 75$$

درکل چون در این سؤال هیچ نقطه‌ای از A و B و C و D جابجا نشده است، پس همه‌ی Δ ها صفر است پس همه‌ی ψ ها نیز برابر صفر است.

$$M_{BA} = \frac{2EI}{\underset{6}{L_{BA}}}\left(2\theta_B + \cancel{\theta_A}^{\,0} - 3\cancel{\psi_{BA}}^{\,0}\right) + \overset{75\ \text{kN.m}}{FEM_{BA}}$$

(اتصال گیردار) (Δ هر دو صفر است)

$$\rightarrow M_{BA} = \frac{2EI\theta_B}{3} + 75$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{\underset{6}{L_{BC}}}\left(2\theta_B + \theta_C - 3\cancel{\psi_{BC}}^{\,0}\right) + \overset{-112.5}{FEM_{BC}}$$

$$\rightarrow M_{BC} = \frac{2EI\theta_B}{3} + \frac{EI\theta_C}{3} - 112.5$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{\underset{6}{L_{CB}}}\left(2\theta_C + \theta_B - 3\cancel{\psi_{CB}}^{\,0}\right) + \overset{112.5}{FEM_{CB}}$$

$$\rightarrow M_{CB} = \frac{2EI\theta_C}{3} + \frac{EI\theta_B}{3} + 112.5$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{\underset{4.5}{L_{CD}}}\left(2\theta_C + \cancel{\theta_D}^{\,0} - 3\cancel{\psi_{CD}}^{\,0}\right) + \cancel{FEM_{CD}}^{\,0}$$

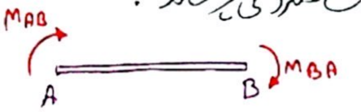
$$\rightarrow M_{CD} = \frac{4EI\theta_C}{4.5}$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{\underset{4.5}{L_{DC}}}\left(2\cancel{\theta_D}^{\,0} + \theta_C - 3\cancel{\psi_{DC}}^{\,0}\right) + \cancel{FEM_{DC}}^{\,0}$$

$$\rightarrow M_{DC} = \frac{4EI\theta_C}{9}$$

در روابط فوق همه‌ی لنگرها در جهت ساعتگرد، مثبت فرض می‌شوند.

مثلاً M_{AB} یعنی لنگری که از روی عضو AB وارد شود آن را ساعتگرد می‌چرخاند.

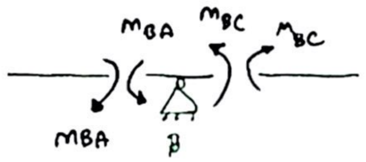


یا مثلاً M_{BA} لنگری است که روی عضو BA وارد شود و آن را ساعتگرد می‌چرخاند.

گام چهارم: نوشتن معادلات تعادل

با M هایی که از گام قبلی به دست آمد می‌توانیم پس از برش زدن‌های مناسب در تیر، M را از نظر عددی حل و به جواب برسیم.

برای ۲ نقطه‌ی B و C معادلات تعادل را می‌نویسیم.

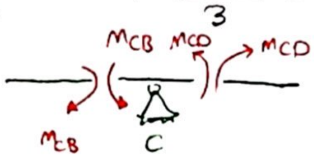


برای تعادل در نقطه B داریم:

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_B = 0 \longrightarrow -M_{BC} - M_{BA} = 0 \rightarrow$$

$$\left(\frac{2EI\theta_B}{3}+75\right)+\left(\frac{2EI\theta_B}{3}+\frac{EI\theta_C}{3}-112.5\right)=0$$

$$\rightarrow \frac{4EI\theta_B}{3}+\frac{EI\theta_C}{3}=37.5 \quad \text{(II)}$$



$$\sum M_C = 0 \rightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0$$

(I)

$$\left[\frac{2EI\theta_C}{3}+\frac{3EI\theta_B}{3}+112.5\right)+\frac{8EI\theta_C}{9}=0 \longrightarrow \frac{EI\theta_B}{3}+\frac{14EI\theta_B}{9}=-112.5$$

حل دستگاه دو معادله دو مجهول (I) و (II) :
$$\begin{cases}\theta_B = \dfrac{48.82}{EI}\\[2mm] \theta_C = -\dfrac{82.75}{EI}\end{cases}$$

6

با توجه به اینکه θ در صورت ساعتگرد بودن، مثبت است چون پاسخ θ_C عددی منفی درآمد، پس θ_C پادساعتگرد است.

تمرین ۳

در واقع در هنگام نوشتن روابط شیب افت، بین لنگرها و θ را رابطه برقرار کردیم سپس با نوشتن دو معادله‌ی تعادل در دو نقطه‌ی B و C معادلات حل شد.

اکنون با یافتن θ_C و θ_B و قرار دادن این مقادیر در رابطه‌ی شیب افتی که در گام $\boxed{3}$ نوشتیم، لنگرهای مجهول در گام 3 بدست می‌آیند

$$M_{AB} = \frac{EI\theta_B}{3} - 75 \xrightarrow{\theta_B = \frac{48.82}{EI}} M_{AB} = -58.72 \ \text{KN.m}$$

چون M_{AB} منفی درآمده یعنی M_{AB} پادساعتگرد است

$$M_{BA} = \frac{2EI\theta_B}{3} + 75 \xrightarrow{\theta_B = \frac{48.82}{EI}} M_{BA} = 107.55 \ \text{KN.m}$$

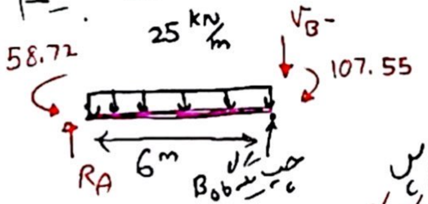
$$M_{BC} = \frac{2EI\theta_B}{3} + \frac{EI\theta_C}{3} - 112.5 \xrightarrow{\theta_B = \frac{48.82}{EI},\ \theta_C = \frac{-82.75}{EI}} M_{BC} = -107.55 \ \text{KN.m}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI\theta_C}{3} + \frac{EI\theta_B}{3} + 112.5 \xrightarrow{\theta_B = \frac{48.82}{EI},\ \theta_C = \frac{-82.75}{EI}} M_{CB} = 73.58 \ \text{KN.m}$$

$$M_{CD} = \frac{4EI\theta_C}{4.5} \xrightarrow{\theta_C = \frac{-82.75}{EI}} M_{CD} = -73.58 \ \text{KN.m}$$

$$M_{DC} = \frac{4EI\theta_C}{9} \xrightarrow{\theta_C = \frac{-82.75}{EI}} M_{DC} = -36.79 \ \text{KN.m}$$

لنگرهای انتهای اعضا را بدست آوردیم. اکنون با استفاده از روش شیب افت به یک سازه‌ی معین رسیدیم. و می‌توانیم با تحلیل این سازه‌ی معین (FBD) نیروی تکیه‌گاهی در هر تکیه‌گاه را یابیم.

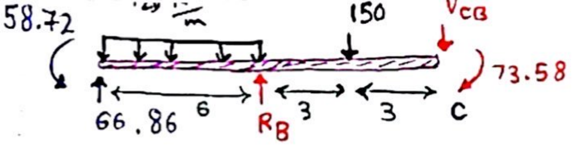


ابتدا عضو AB: به جای تکیه‌گاه گیردار A، R_A و لنگر مشخص 58.72 را قرار دادیم و برش تیر را از سمت چپ تکیه‌گاه B اعمال دادیم پس R_B نداریم و در عوض V_B^- داریم. کافی است حول نقطه‌ی چپ تکیه‌گاه B لنگر بگیریم.

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_B = 0 \longrightarrow 107.55 + (-25) \times 6 \times \frac{6}{2} + (-58.72) + R_A(6) = 0 \longrightarrow R_A = 66.85 \ \text{KN}$$

علت این که سمت چپ B را برش زدیم امکان استفاده از M_{BA} است و اینکه R_B را نیز به بازی نیاریم.

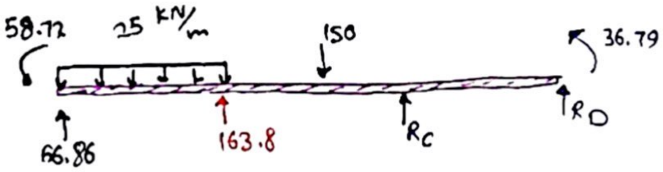
عضو AC : سمت چپ C را برش می‌زنیم .



$$\Sigma M_C = 0 : 58.72 - 66.86 \times 12 + (25 \times 6) \times 9 - R_B \times 6 + 150 \times 3 - 73.58 = 0$$

$$\longrightarrow R_B = 163.8 \ kN$$

عضو AD :



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow 66.86 + 163.8 + R_C + R_D - 25 \tfrac{kN}{m} \times 6m - 150 = 0 \Rightarrow R_C + R_D =$$

$$R_C + R_D = 69.12 \quad (I)$$

$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow 58.72 - 66.86 \times 16.5 + 25 \times 6 \times (13.5) - 163.8 \times 10.5 + 150 \times 7.5$$

$$- R_C \times 4.5 + 36.79 = 0 \rightarrow R_C = 93.87 \ kN \xrightarrow{(I)} R_D = -24.53$$

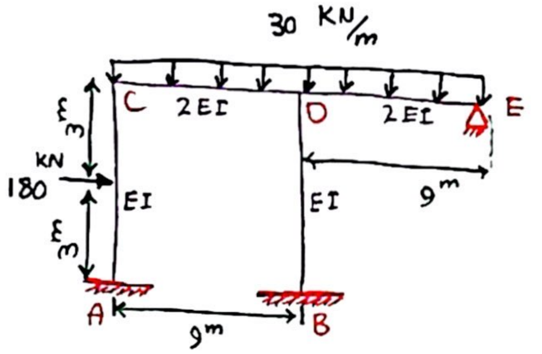
تمرین ۳ .

موضوع: تحلیل قاب به روش شیب افت

محمدحسین آذری فرد
شماره‌ی دانشجویی: ۹۸۴۴۳...۱۰۰
استاد: دکتر سجاد میرزا محمدی

ص 23 جزوه

تمرین ۴: در قاب نشان داده شده، واکنش‌های تکیه‌گاهی را به روش شیب - افت محاسبه کنید.



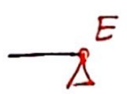
حل:

گام اول: تعیین درجات آزادی.

درجه‌ی آزادی انتقالی: قاب هیچ گونه حرکت انتقالی ندارد. نقاط A و B و E که تکیه‌گاه هستند حرکت ندارند و نقطه‌های D و E نه حرکت جانبی می‌توانند داشته باشند (تکیه‌گاه E جلوی حرکت افقی را گرفته) و نه حرکت قائم. (تکیه‌گاه‌های A و B محدودیت ایجاد کرده است.)

پس همه‌ی نقاط (A و B و C و D و E) در جای خود باقی می‌مانند پس همه‌ی Δها، برابر صفر خواهند بود پس: $\boxed{\Delta = 0}$ برای تمام اعضا

درجه‌ی آزادی دورانی: دو نقطه‌ی A و B، اتصال گیردار هستند پس $\theta_A = \theta_B = 0$. (درجه‌ی آزادی دورانی ندارند.)

اما سه نقطه‌ی C  و D  و E  هر کدام دارای یک درجه‌ی آزادی هستند پس در کل سازه دارای ۳ درجه آزادی دورانی است.

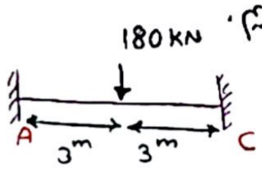
تمرین ۴

گام دوم : جدا سازی اعضا و یافتن FEM در دو سر هر عضو .

در محل گره‌ها و محل تکیه‌گاه‌ها باید اعضا را از هم جدا کنیم ، ۴ عضو مجزا خواهیم داشت :

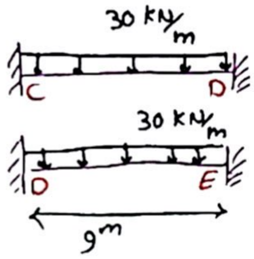
AC , CD ، BD، DE .

برای هر کدام از آنها طبق باری که روی آن قرار دارد ، FEM را محاسبه می‌کنیم.



$$FEM_{CA} = -FEM_{AC} = \frac{180^{kN} \times 6^{m}}{8} = 135^{kN.m}$$

چون هیچ باری روی آن قرار ندارد : $FEM_{BD} = FEM_{DB} = 0$



$$\rightarrow FEM_{DC} = FEM_{ED} = -FEM_{CD} = -FEM_{DE} = \frac{30^{kN/m} \times 9^{2\,m^2}}{12} = 202.\ kN.m$$

گام سوم : روابط شیب افت :

$$M_{AC} = \frac{2EI}{6}\left(2\cancel{\theta_A}^{0} + \theta_C - 3\cancel{\psi_{AC}}^{0}\right) + \cancel{FEM_{AC}}^{-135} = \frac{EI\theta_C}{3} - 135$$

$$M_{CA} = \frac{2EI}{6}\left(2\theta_C + \cancel{\theta_A}^{0} - 3\cancel{\psi_{CA}}^{0}\right) + \cancel{FEM_{CA}}^{135} = \frac{2EI\theta_C}{3} + 135$$

$$M_{CD} = \frac{2(2EI)}{6}\left(2\theta_C + \theta_D - 3\cancel{\psi_{CD}}^{0}\right) + \cancel{FEM_{CD}}^{-202.5} =$$

$$M_{DC} = \frac{2.(2EI)}{6}\left(2\theta_D + \theta_C - 3\cancel{\psi_{DC}}^{0}\right) + \cancel{FEM_{DC}}^{202.5} =$$

$$M_{BD} = \frac{2EI}{6}\left(2\cancel{\theta_B}^{0} + \theta_D - 3\cancel{\psi_{BD}}^{0}\right) + \cancel{FEM_{BD}}^{0}$$

$$M_{DB} = \frac{2EI}{6}\left(2\theta_D + \cancel{\theta_B}^{0} - 3\cancel{\psi_{DB}}^{0}\right) + \cancel{FEM_{DB}}^{0}$$

$$\left(M_{DE} = \frac{2.(2EI)}{6}\left(2\theta_D + \theta_E - 3\cancel{\psi_{DE}}^{0}\right) + \cancel{FEM_{DE}}^{-202.5}\right.$$

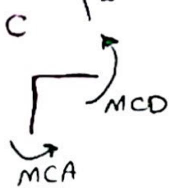
$$\times(-\tfrac{1}{2})\ \cancel{M_{ED}}^{0} = \frac{2(2EI)}{6}\left(2\theta_E + \theta_D - 3\cancel{\psi_{ED}}^{0}\right) + \cancel{FEM_{ED}}^{202.5} \Big| \xrightarrow{+} M_{AB} = \frac{2EI\theta_D}{3} - 303.$$

می‌دانیم در تکیه‌گاه‌های مفصلی لنگر صفر است پس در این سوال لنگر M ED را صفر -

تمرین ۴

گام سوم : اکنون در این مرحله در اعضا یا گره‌ها معادلات تعادل را می‌نویسیم و با استفاده از لنگرهایی که در گام قبلی بدست آوردیم ، مجهولات را بدست می‌آوریم .

ابتدا گره C :



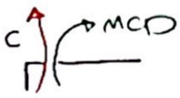
$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow M_{CD} + M_{CA} = 0$$

علت اینکه این لنگرها را با این جهت مثبت گرفتیم :

می‌دانیم مفهوم M_{CD} لنگری است که در سمت C از عضو CD رسم می‌شود و جهت مثبت آن طوری است که عضو CD را ساعتگرد می‌چرخاند . این لنگر در واقع نزدیک‌ترین نقطه قبل از تمام شدن عضو یعنی دقیقاً به فاصله‌ی یک ε (اپسیلون) سمت راست C رسم می‌شود . به این ترتیب .

در فاصله‌ی ε رسم می‌شود نزدیک به C
در ... نمایش ! و جهت آن طوری است که عضو را (عضو CD)
را ساعتگرد بچرخاند .

اکنون کافی است در نقطه‌ی برش ذره‌ای نزدیک C، جهت تعادل آن نیاز به یک لنگر مخالف CD و به اندازه‌ی CD رسم کنیم ولی در جهت مخالف CD یعنی پادساعتگرد.



پس لنگر M_{CD} اگر به عضو وارد شود ساعتگرد است و در سمت راست C در واقع نیست چون فاصله بسیار نزدیک اپسیلون .

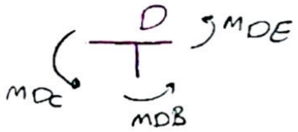
و اگر همین لنگر را بخواهیم به گره وارد کنیم پادساعتگرد وارد می‌کنیم و جای آن روی گره است و در سمت راست نقطه‌ی C .

تعادل در گره‌ی C : ادامه‌ی حل :

$$M_{CD} + M_{CA} = 0 \rightarrow \left(\frac{2EI\theta_C}{3}+135\right) + \left(\frac{8EI\theta_C}{9}+\frac{4EI\theta_D}{9}-202.5\right) =$$

(I)

برای گره D داریم :



مانند توضیحاتی که روی گره ی C بیان شد برای گره D نیز تعادل باید به درستی در نظر گرفته شود.

$$\Sigma M_D = 0 \longrightarrow M_{DC} + M_{DB} + M_{DE} = 0 \rightarrow$$

$$\left(\frac{8EI\theta_D}{9} + \frac{4EI\theta_C}{9} + 202.5\right) + \left(\frac{2EI\theta_D}{3} - 303.75\right) + \frac{2EI\theta_D}{3} = 0$$

$$\rightarrow \frac{20EI\theta_D}{9} + \frac{4EI\theta_C}{9} = 101.25 \qquad \text{II}$$

I , II : دستگاه دو معادله دو مجهول را حل می کنیم : $\theta_D = \dfrac{39.12}{EI}$, $\theta_C = \dfrac{32.22}{EI}$

اکنون که θ_C و θ_D را یافتیم در روابط شیب افت آنهایی را که تنها مجهولات آن فقط θ_C و θ_D بود را بدست می آوریم :

$$M_{AC} = \frac{2EI}{6}\theta_C - 135 \xrightarrow{\theta_C = \frac{32.22}{EI}} M_{AC} = \frac{2EI}{6}\,\frac{32.22}{EI} - 135 \rightarrow \boxed{M_{AC} = -124.26 \ \text{kN.m}}$$

$$M_{CA} = \frac{2EI \cdot 2\theta_C}{6} + 135 \xrightarrow{\theta_C = \frac{32.22}{EI}} M_{CA} = \frac{2EI}{3} \times \frac{32.22}{EI} + 135 \rightarrow \boxed{M_{CA} = 156.48 \ \text{kN.m}}$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{3}(2\theta_C + \theta_D) - 202.5 \xrightarrow[\text{جایگزین می کنیم}]{\theta_C \text{ و } \theta_D \text{ را داریم}} \boxed{M_{CD} = -156.48 \ \text{kN.m}}$$

$$\rightarrow \boxed{M_{DC} = 251.59 \ \text{kN.m}} \xleftarrow[\text{جایگذاری}]{\theta_D \text{ و } \theta_C} M_{DC} = \frac{2.(2EI)}{6}(2\theta_D + \theta_C) + (-202.5)$$

$$M_{BD} = \frac{2EI}{6}(\theta_D) \xrightarrow{\text{جایگذاری } \theta_D} \boxed{M_{BD} = 13.04 \ \text{kN.m}}$$

$$M_{DB} = \frac{2EI}{6}(2\theta_D) \xrightarrow{\text{جایگذاری } \theta_D} \boxed{M_{DB} = 26.08 \ \text{kN.m}}$$

از رابطه ی MED در مبحث صفحه ی ۲ داریم :

$$\underbrace{M_{ED}}_{0} = \frac{2(2EI)}{6}(2\theta_E + \theta_D)$$

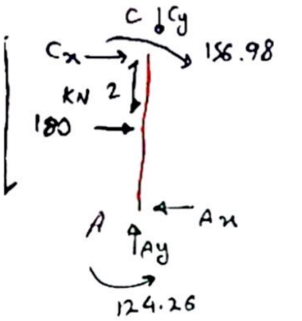
$$\rightarrow \theta_E = -\frac{\theta_D}{2} \longrightarrow \theta_E = \frac{-19.56}{EI}$$

4

تمرین ٤ تحلیل سازه ۲

$$M_{DE} = \frac{2(2EI)}{6}(2\theta_D + \theta_E) - 202.5 \longrightarrow M_{DE} = -277.67$$

اکنون با توجه به ممان‌های به دست آمده در دو سر هر عضو، برای هر عضو FBD می‌نویسیم.
تا نیروی تکیه‌گاهی نیز به دست آید.

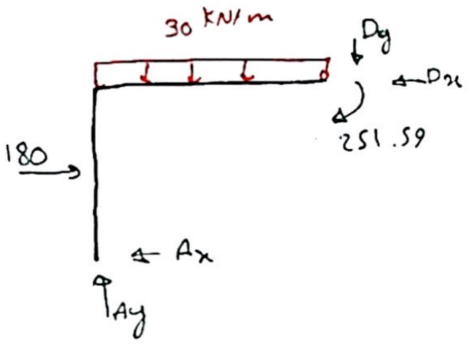


$$\sum M_C = 0 \rightarrow -A_x(4) + 180(3) + 124.26 - 156.48 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{A_x = 84.63\ KN}$$

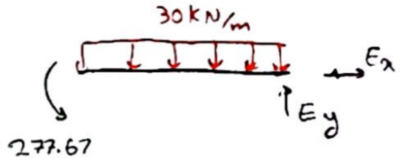
$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x = \cdots$$

... نیازی نیست



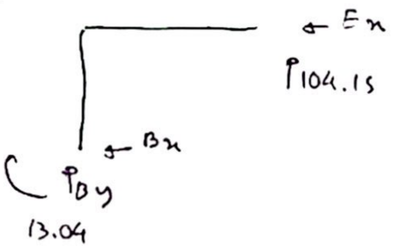
$$\sum M_D = 0 \rightarrow 124.26 - 251.59 + 30(9)(4.5) + 180(3) - A_y(9) - A_x(6) = 0 \xrightarrow{A_x = 84.63\ KN}$$

$$\boxed{A_y = 124.43\ KN}$$



$$\sum M_D = 0 \rightarrow 277.67 - 30(9)(4.5) - 9E_y = 0$$

$$\rightarrow \boxed{E_y = 104.15\ KN}$$



$$\sum M_O = 0 : -251.59 - 30(9)(4.5) + (104.15)(9) - B_x(6) - 13.04 = 0$$

$$\boxed{B_x = -6.52}$$

$$\sum F_x = 0 : -84.63 + 6.52 - E_x + 180 = 0 \rightarrow \boxed{E_x = 101.89\ KN}$$

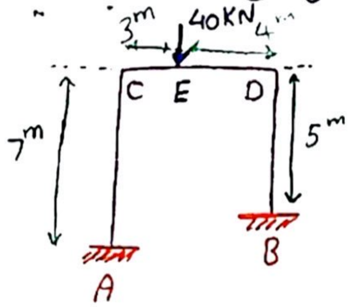
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -30(18) + 104.15 + 124.43 + B_y = 0 \rightarrow \boxed{B_y = 311.42\ KN}$$

تمرین ٤

موضوع : روش شیب افت در قاب

ص 25 جزوه

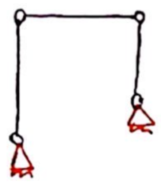
تمرین 5: قاب نشان داده در شکل را به روش شیب افت تحلیل کرده و نیروهای تکیه گاهی آن را حساب کنید.



EI: ثابت $\qquad \theta_A=\theta_B=0 \qquad \theta_C=\theta_D\neq0$

حل : گام اول : محاسبه ی درجه ی آزادی انتقالی :

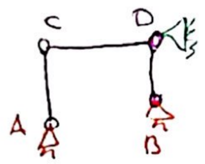
تکیه گاه های گیردار را به مفصلی تبدیل کنیم و همه ی joint ها را مفصلی کنیم.



این سازه تکیه گاه مفصلی دارد یعنی ٤ reaction . سه معادله تعادل و دو شرط (condition ، مفصل داخلی).

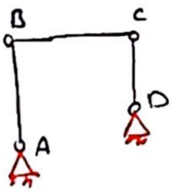
$٤-٢-٣=-١$

یعنی ناپایدار است.

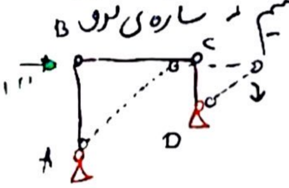


اما با یک تکیه گاه در نقطه D سازه پایدار خواهد شد.

بدین ترتیب درجه ی آزادی انتقالی این سازه برابر ۱ می باشد.

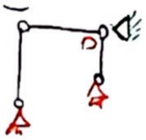


البته درجه ی آزادی را این گونه نیز می توانیم تبیین کنیم که سازه ی فوق با یک نیروی افقی بسیار کوچک در نقطه B فرو می ریزد.



و با قرار دادن تنها یک تکیه گاه در D می توانیم سازه را در مقابل همه ی نیروی بزرگ و هر نیروی دیگری پایدار کنیم.

سازه پایدار ←



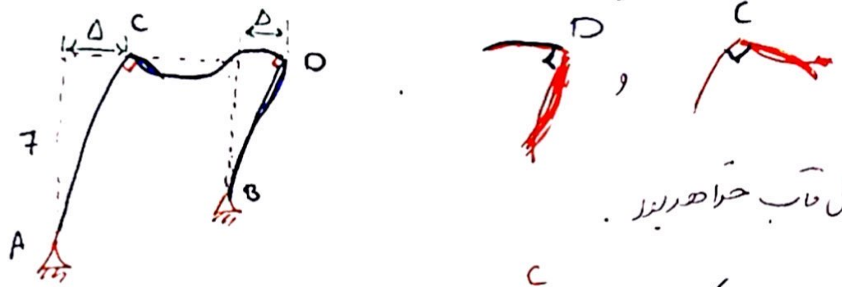
مثال الف (دوباره)

با وارد آمدن بار نقطه‌ای در نقطه‌ی E ، تیر CD تحت خمش واقع می‌شود. در این گونه بارگذاری تیر به صورت

یا برعکس ( ) در می‌آید. که در اینجا به صورت خواهد بود. یکی از دلایل اینگونه تغییر شکل

این است که نقاط C و D مفصل نیستند و در نتیجه این گره‌ها به حالت گیردار هستند یعنی زاویه‌ی 90° را

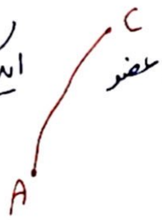
حفظ می‌کنند.



با تصویر مختصر فوق این تغییر شکل قاب خواهد رسید.

ψ_{AC} : یعنی قبل از بارگذاری که عضو

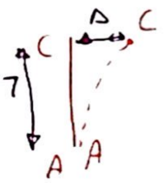
اینگونه بوده است و پس از بارگذاری عضو



اینگونه شده است

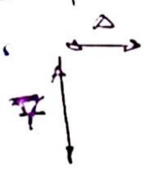
همان طور که می‌بینیم گوی AC اینطور چرخیده است یعنی ساعتگرد پس ψ_{AC} ، مثبت است.

میزان چرخش کل عضو را ψ می‌گوییم به این ترتیب که



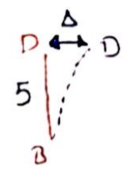
در جهت افقی C ، Δ واحد جابجا شده و طول عضو 7 است و 7 بوده است.

(از تحلیل سازه‌ی 1 به یاد داریم که تغییر شکل‌ها، طول عضو را تغییر نمی‌دهد). پس میزان چرخش در واقع شیب خط جدید نسبت به قدیم



، $\frac{\Delta}{7}$ و چرخش ساعتگرد نسبت به قبل را ، مثبت می‌گوییم.

به همین ترتیب

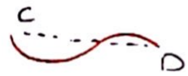


$\psi_{BD} = \frac{\Delta}{5}$

اما در CD که دقت کنیم

واصل CD قبل از بارگذاری شیبش صفر است و

پس از بارگذاری

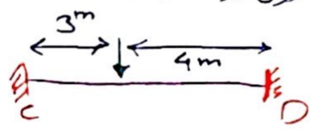


باز هم شیب، صفر است یعنی در تیر CD چرخش نسبت به حالت قبل نمی‌بینیم پس $\psi_{CD} = 0$.

تمرین ۵

گام دوم: مشخص کردن FEM ها. می دانیم که هر عضوی که روی آن بار خارجی نباشد، FEM آن صفر خواهد بود. روی دو عضو AC و BD نیروی قرار ندارد پس FEM آنها صفر است.

اما عضو CD



$$FEM_{CD} = \frac{-40\times 3\times 4^2}{7^2} = -39.2 \ \text{KN.m}$$

$$FEM_{DC} = \frac{40\times 3^2\times 4}{7^2} = 29.4 \ \text{KN.m}$$

گام سوم: روابط شیب - افت:

$$M_{AC} = \frac{2EI}{7}\left(\theta_C + 0 + 3\frac{\Delta}{7}\right) + 0 = \frac{2EI\theta_C}{7} - \frac{6EI\Delta}{49}$$

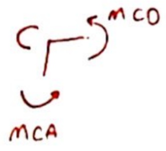
$$M_{CA} = \frac{2EI}{7}\left(2\theta_C + 0 - \frac{3\Delta}{7}\right) = \frac{4EI\theta_C}{7} - \frac{6EI\Delta}{49}$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{7}\left(2\theta_D + \theta_C - 0\right) - 39.2 = \frac{4EI\theta_C}{7} + \frac{2EI\theta_D}{7} - 39.2$$

$$M_{DB} = \frac{2EI}{5}\left(2\theta_C + 0 - 3\times\frac{\Delta}{5}\right) + 0 = \frac{4EI\theta_D}{5} - \frac{6EI\Delta}{25}$$

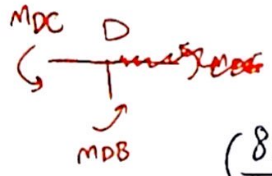
$$M_{BD} = \frac{2EI}{5}\left(0 + \theta_D - \frac{3\Delta}{5}\right) + 0 = \frac{2EI\theta_D}{5} - \frac{6EI\Delta}{25}$$

گام چهارم: معادلات تعادل در اعضا و گره ها و یافتن مجهولات:



$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow M_{CD} + M_{CA} = 0 \rightarrow \left(\frac{2EI\theta_C}{3} + 135\right) + \left(\frac{8EI\theta_C}{9} + \frac{4EI\theta_D}{9} - 202.5\right) =$$

$$\rightarrow \frac{14EI\theta_C}{9} + \frac{4EI\theta_C}{9} = 67.5 \ ☆$$



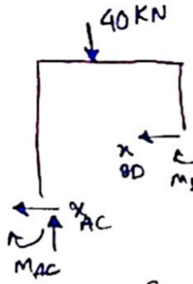
$$\Sigma M_D = 0 \rightarrow M_{DC} + \cancel{M_{DB}} + M_{DB} = 0 \rightarrow$$

$$\left(\frac{8EI\theta_D}{7} + \frac{4EI\theta_C}{7} + 202.5\right) + \left(\frac{2EI\theta_D}{3} - 303.75\right) + \frac{2EI\theta_D}{25} = 0$$

$$\rightarrow \frac{48EI\theta_D}{35} + \frac{2EI\theta_C}{7} - \frac{6EI\Delta}{25} = -29.4 \ ☆☆$$

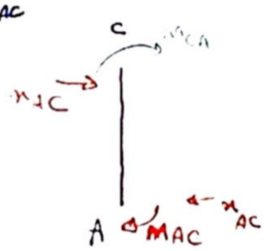
تمرین ۵

با نوشتن تعادل گره‌ها C و گره‌ها D دو معادله بدست آمد اما اگر توجه کنیم ۳ مجهول داریم θ_C و θ_D و Δ .



پس باز هم به معادلات نیاز داریم .

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow x_{BD} + x_{AC} = 0 \qquad \text{I}$$

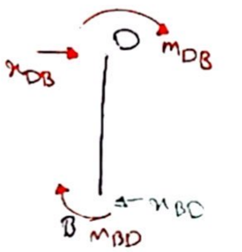


با استفاده از نیروهایی که در اتصالات در ستون‌ها ایجاد می‌شود داریم

بازوی نیرو

$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_C = 0 \rightarrow -x_{AC} \times 7 - M_{AC} - M_{CA} = 0 \rightarrow$$

$$x_{AC} = -\frac{M_{AC}+M_{CA}}{7} \qquad (2)$$



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_D = 0 \rightarrow -x_{BD} \times 5 - M_{BD} - M_{DB} = 0$$

$$x_{BD} = -\frac{M_{BD}+M_{DB}}{5} \qquad (1)$$

جایگذاری ① و ② در I :

$$\frac{M_{AC}+M_{CA}}{7} + \frac{M_{BD}+M_{DB}}{5} = 0 \longrightarrow$$

با این معادله مبین ... که بدست آمد و معادلات ... :

$$\frac{42EI\theta_D}{5} + 4.6\,EI\Delta + \frac{30EI\theta_C}{7} = 0 \qquad ***$$

با نوشتن * و ** و *** :

حل ۳ معادله ۳ مجهول ،
$$\theta_D = \frac{-34.2}{EI}, \quad \theta_C = \frac{40.2}{EI}, \quad \Delta = \frac{-25.2}{EI}$$

با جایگذاری θ_D و θ_C و Δ در روابط شیب :

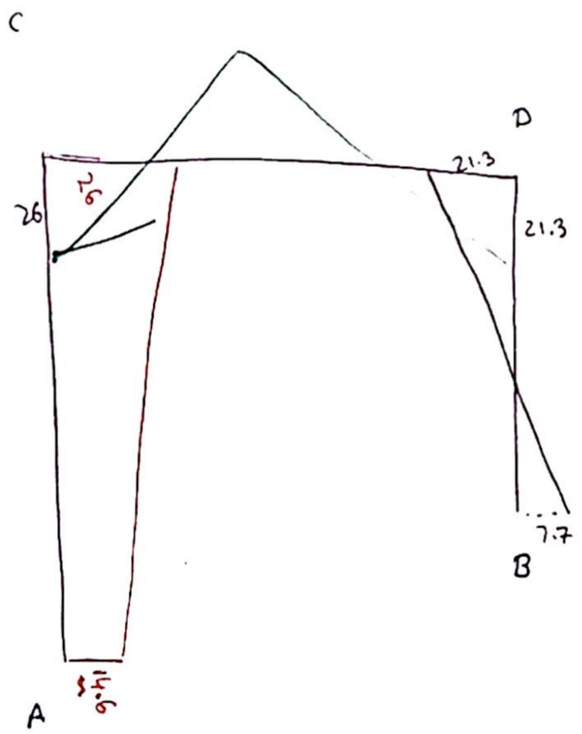
$M_{AC} = 14.6$ $\quad M_{DC} = 21.3$ $\quad M_{CA} = 28$ $\quad M_{DB} = -21.3$

$M_{CD} = -26$ $\quad M_{BD} = 7.7$

تمرین ۵.

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

نمودار لنگر خمشی



5

تمرین ۵

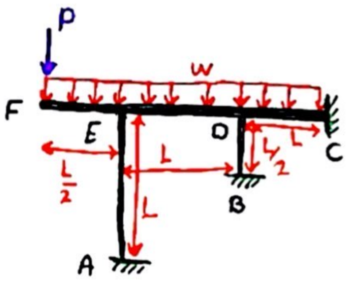
مراحل روش شیب افت :

۱. تعیین درجات آزادی انتقالی و دورانی سازه

۲. نوشتن معادلات شیب افت

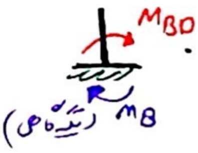
۳. استفاده از معادلات تعادل استاتیکی

٤. لنگرهای انتهایی اعضا مشخص شده و سازه معین می‌شود.



مثال ۱۰. مقدار لنگر در تکیه‌گاه B را بیابید. (EI در اعضا ثابت است)
(برحسب θ_D)

حل: نقطه‌ی B به دلیل اینکه تکیه‌گاه است و فقط یک طرف دارد ، مثل اعضا لازم نیست در دو طرف آن دو لنگر بدست آوریم... یعنی اگر از روابط شیب افت در نقطه‌ی B استفاده کنیم پس با نوشتن یک تعادل ساده در B لنگر تکیه‌گاهی بدست می‌آید. یعنی ابتدا با استفاده از روابط شیب افت M_{BD} را می‌یابیم سپس در گره B داریم:

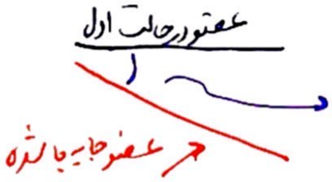


$M_{BD} = M_B$

از طرفی با توجه به وارد نشدن بارگذاری بر روی B ، $FEM_{BD}=0$.

با توجه به تکیه‌گاه گیردار C در جهت افقی و تکیه‌گاه گیردار B و A در جهت قائم سازه هیچ حرکتی نخواهد داشت در واقع درجات آزادی انتقالی صفر است $\Delta = 0$. یعنی همه‌ی گره‌ها در جای خود می‌مانند پس در عضو BD هم، نه B حرکت دارد و نه D. پس عضو BD همین طور قائم می‌ماند و $\psi_{BD}=0$.

دقت داریم که ψ در هر عضو یعنی عضو طوری جابه‌جا شود که نسبت به حالت اولیه‌اش زاویه بگیرد مثلاً

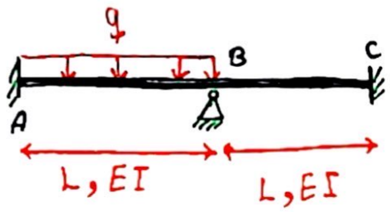


$\psi \neq 0$

روابط شیب افت را می‌نویسیم:

$$M_B = M_{BD} = \frac{2EI}{L/2}\left(2\theta_B + \theta_D - 3\psi_{BD}\right) + FEM_{BD} = \frac{4EI\theta_D}{L} \checkmark$$

0، تکیه‌گاه گیردار — 0 حرکت انتقالی نداریم — نیرویی روی عضو نیست



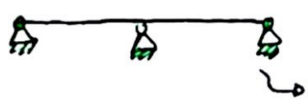
مثال ۱۵: سازه‌ی مقابل را در نظر بگیرید

الف) این سازه در روش شیب افت چند مجهول دارد؟

ب) دوران گره B این تیر را بدست آورید. ج) لنگر تکیه‌گاه A.

گام اول: تعیین درجات آزادی

حل: الف) اگر نیروی افقی یا قائم به تیر وارد شود، تیر هیچ حرکتی نخواهد داشت علت وجود دو تکیه‌گاه گیردار در دو سر و یک تکیه‌گاه ساده در نقطه‌ی B است. اگر به روش مفصل کردن همه‌ی اتصالات هم می‌رفتیم باز هم سازه پایدار بود یعنی $n_\Delta = 0$



سازه پایدار است پس $n_\Delta = 0$.

به سراغ درجه آزادی دورانی می‌رویم. C و A تکیه‌گاه گیردار پس به هیچ وجه در این نقاط اجازه‌ی چرخش نداریم و قطعاً در این دو نقطه درجه آزادی دورانی = صفر. اما نقطه B یک قطعه پیوسته روی تکیه‌گاه ساده است که یک درجه‌ی آزادی دورانی داریم پس در کل: $n_\theta = 1$.

$\boxed{\theta_B=?}$: پس فقط در کل یک درجه‌ی آزادی داریم که آن چرخش در نقطه‌ی B است

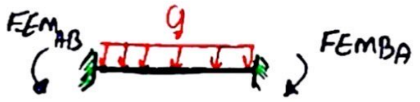
گام دوم: روابط شیب افت

ب) چون در گره‌ها (گره‌ای) آزادی انتقال نداریم دوران صفر است پس همه‌ی نقاط در جای خودشان ماندند پس:

$\psi_{AB}=\psi_{BC}=0$

FEM در قسمت BC چون نیرویی روی تیر نیست برابر صفر است: $FEM_{BC}=FEM_{CB}=0$.

در قسمت AB ، FEM را داریم:



$$FEM_{BA}=-FEM_{AB}=\frac{qL^2}{12}$$

چون مجهول θ_B است. با استفاده از روابط شیب افت دو طرف تکیه‌گاه B را می‌نویسیم. M_{BC} و M_{BA} .

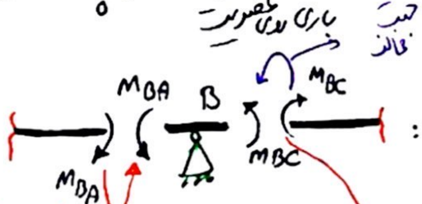
$$M_{BA}=\frac{2EI}{L}(2\theta_B+\cancel{\theta_A}-3\cancel{\psi_{BA}})+FEM_{BA}=\frac{4EI\theta_B}{L}+\frac{qL^2}{12}$$

تکیه‌گاه گیردار

$$M_{BC}=\frac{2EI}{L}(2\theta_B+\theta_C-3\psi_{BC})+FEM_{BC}=\frac{4EI\theta_B}{L}$$

0 گیردار — 0 — 0 باری روی عضو نیست

گام سوم: نوشتن معادلات تعادل در گره B :



مثبت بدست آمد یعنی ساعتگرد است

حال باید برای تعادل در این نقطه جهت مخالفش را (پادساعتگرد) روی قسمت دیگر اعمال کرد.

از محاسبات بالا مثبت درآمد یعنی ساعتگرد است

حال باید جهت مخالف آن را یعنی پادساعتگرد را به تکیه‌گاه B اعمال کرد.

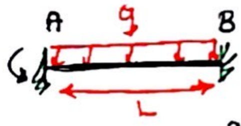
تعادل در گره B نقطه : $\overset{+}{\curvearrowleft}\sum M_B=0 \rightarrow M_{BA}+M_{BC}=0 \Rightarrow \frac{4EI\theta_B}{L}+\frac{qL^2}{12}+\frac{4EI\theta_B}{L}=0$

35 $\rightarrow \theta_B=\frac{-qL^2}{96EI}$ علامت منفی یعنی دوران گره B در جهت پادساعتگرد است.

ج) برای محاسبه‌ی لنگر در تکیه‌گاه A ، کافی است M_{AB} را از روابط شیب افت به دست بیاوریم.

چون A تکیه‌گاه است M_{AB} که به دست بیاید همان M_A خواهد بود.

$$M_A = M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left(2\underset{\substack{0\\ \text{گیردار}}}{\theta_A} + \underset{\text{درجه‌ی قبلی به دست آمد}}{\theta_B} - 3\underset{0}{\psi_{AB}}\right) + FEM_{AB}$$



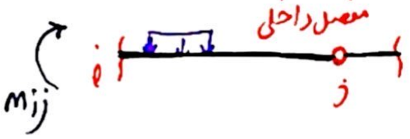
$$FEM_{AB} = -\frac{qL^2}{12}$$

$$M_A = M_{AB} = \left(\frac{2EI}{L}\right)\left(-\frac{qL^2}{96EI}\right) + \left(-\frac{qL^2}{12}\right) = -\frac{5qL^2}{48}$$ ← پادساعتگرد

- بررسی روابط اصلاح شده شیب افت

در دو حالت خاص می‌توان درجه‌ی آزادی دوران و یا انتقالی مربوط به یک نقطه از سازه را از مجهولات روش شیب افت حذف کرد. با این کار مجهولات موجود در روابط کاهش یافته و حل با سرعت بالاتری انجام می‌شود. این دو حالت خاص عبارتند از:

حالت ۱) اگر لنگر خمشی در انتهای j از عضو ij ، صفر باشد، به عبارت دیگر اگر در یک انتهای عضو (مثلاً j) مفصل خمشی و یا تکیه‌گاه مفصلی انتهایی واقع شود، M_{ij} از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:



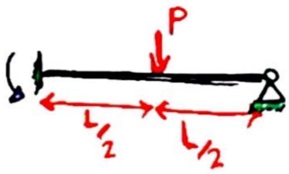
$$M_{ij} = \frac{3EI}{L}(\theta_i - \psi_{ij}) + FEM'_{ij}$$

همان طور که در رابطه‌ی فوق ملاحظه می‌شود، دوران گره j (θ_j) از رابطه حذف شده است.

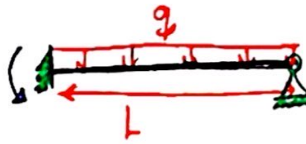
در این رابطه FEM'_{ij} لنگر گیرداری برای تیر ij در حالت یکسر گیردار و یکسر مفصل می‌باشد.

برای محاسبه‌ی FEM'_{ij} می‌توان از رابطه‌ی روبه‌رو استفاده کرد: $FEM'_{ij} = FEM_{ij} - \frac{1}{2}FEM_{ji}$

همچنین FEM'_{ij} برای چند حالت پرکاربرد در جدول زیر آمده است:

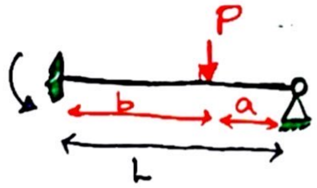


$$FEM'_{ij} = -\frac{3PL}{16}$$



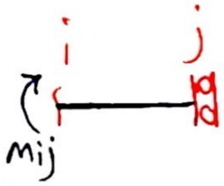
$$FEM'_{ij} = \frac{qL^2}{8}$$

$$FEM'_{ij} = +\frac{M}{2}$$



$$FEM'_{ij} = \frac{-Pab}{L}\left(\frac{b}{L} + \frac{a}{2L}\right)$$

حالت ۲) اگر مقدار نیروی برشی داخلی در انتهای j از عضو ij، صفر باشد. به عبارت دیگر اگر در انتهای عضو (مثلاً j) مفصل برشی و یا تکیه‌گاه لغزنده‌ی گیردار واقع شود، M_{ij} از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

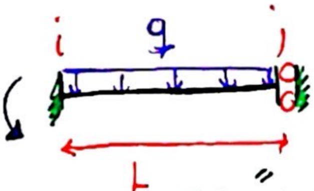


$$M_{ij} = \frac{EI}{L}(\theta_i - \theta_j) + FEM''_{ij}$$

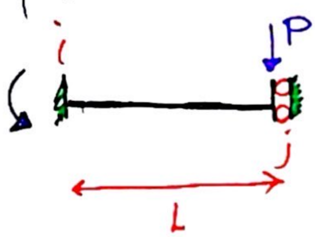
در رابطه‌ی فوق مشخص است که در این حالت چرخش عضو ij (θ_j) با وجود مؤثر بودن در تحلیل، از رابطه حذف شده و حل بسیار ساده‌تر شده است.

FEM''_{ij} لنگر گیرداری انتهای i در حالت گیردار بودن i و لغزنده گیردار بودن گره j می‌باشد.

FEM''_{ij} برای چند تیر پرکاربرد را ببینیم:

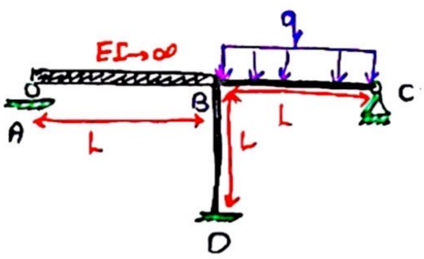


$$FEM''_{ij} = \frac{-qL^2}{3}$$



$$FEM''_{ij} = \frac{-PL}{2}$$

مثال ۱۲: در سازه‌ی نشان داده شده، عکس‌العمل قائم A کدام است؟



$EI \to \infty$ یعنی سختی خمشی عضو نامحدود است یعنی بر اثر هر بار هرچند بزرگ انحنا بر نمی‌دارد و به صورت کاملاً مستقیم باقی می‌ماند. اصطلاحاً عضو صلب می‌نامیم. (rigid)

یعنی θ در همه نقاط برابر صفر.

حل: با توجه به صلبیت محوری عضو BD، نقطه‌ی B جابجایی قائم نداشته و $\Delta_{y_B}=0$ است. همچنین با توجه به صلب بودن عضو AB و با توجه به $\Delta_{y_B}=0$ شیب نقطه B نیز صفر است. گره B یک گره‌ی صلب است یعنی زاویه‌ی بین المان‌ها حفظ می‌شود پس با توجه به صلب بودن AB و عدم چرخش B کلاً θ_B در هر طرف برابر صفر است.

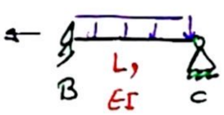
$$\theta_B = 0$$

اگر توجه کنیم عضو BC از یک طرف گیردار است و از طرف دیگر انتهای تکیه‌گاه مفصلی دارد. پس شرایط روابط اصلاح شده‌ی شیب افت را دارد.

رابطه‌ی اصلاح شده

$$\begin{cases} M_{BC} = \dfrac{3EI}{L}(\underset{0}{\theta_B} - \underset{0}{\psi_{BC}}) + FEM'_{BC} \longrightarrow M_{BC} = -qL^2/8 \\ \theta_B = 0 \end{cases}$$

$$FEM'_{BC} = -\frac{qL^2}{8}$$



عضو BD عضوی معمولی است پس از روابط اصلی شیب افت داریم:

$$M_{BD} = \frac{2EI}{L}(2\theta_B + \theta_D - 3\psi_{BD}) + FEM_{BD} = 0$$

θ_B: 0 : متصل به صلب

θ_D: 0 گیردار

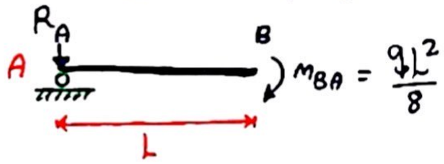
ψ_{BD}: 0 سازه هیچ تحرکی ندارد

FEM_{BD}: 0 باری روی المان نیست

تعادل دورانی در گره B : $M_{BA} + M_{BD} + M_{BC} = 0 \rightarrow M_{BA} + 0 + \left(-\frac{qL^2}{8}\right) = 0 \rightarrow$

$M_{BA} = qL^2/8$ ساعتگرد.

با یافتن M_{BA} اگر در عضو صلب AB تعادل بنویسیم عکس العمل قائم A بدست می‌آید:



$$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_B = 0 \longrightarrow (R_A)(L) - M_{BA} = 0 \longrightarrow \boxed{R_A = \frac{qL}{8}}$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

روش پخش لنگر

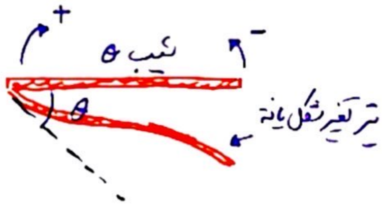
روش پخش لنگر یک روش بسیار کارآمد و پرکاربرد برای تحلیل سازه‌های الاستیک می‌باشد. که می‌توان از آن برای تحلیل سازه‌های نامعین استفاده کرد. این روش یکی از روش‌های سختی می‌باشد که نخستین بار در سال 1930 توسط Hardy Cross در یک مجله‌ی ASCE* منتشر شد.

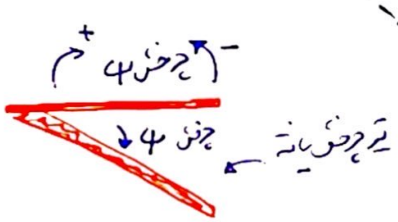
از دهه‌ی 1930 تا زمانی که رایانه‌ها به طور گسترده ای در طراحی و تجزیه و تحلیل سازه‌ها مورد استفاده قرار گرفتند، روش توزیع لنگر متداول‌ترین روش کاربردی بود.

در این روش فقط اثرات خمشی را به حساب می‌آوریم و اثرات محوری و برشی را نادیده می‌گیریم.

جهت قراردادِ لنگر در روش پخش لنگر :

اگر لنگر ساعتگرد باشد علامت آن مثبت ، و اگر لنگر پاد ساعتگرد بود علامت آن منفی است.





روش پخش لنگر : در این روش ابتدا (گام اول:) تمامی گره‌ها را گیردار فرض می‌کنیم و (گام دوم:) در هر عضو FEM را به دست می‌آوریم. FEM لنگر گیرداری است که بر اثر بارگذاری خارجی در دو انتهای عضو ایجاد می‌شود که در بحث شیب افت روابط این FEM را آموختیم.

* American Society of civil Engineers.

گام ۳: بعد از اینکه لنگر اعمالی براثر بارها را در انتهای هر عضو یافتیم لنگرها را روی هر گره از سازه‌ی اصلی اعمال می‌کنیم.

گام ۴: اکنون تعادل در گره را می‌نویسیم گام ۵: و لنگر متعادل کننده را به نسبت سختی عضوهای متصل به گره بین اعضا تقسیم می‌کنیم.

بعضی از مفاهیم فوق ممکن است نامفهوم باشد هرکدام را توضیح می‌دهیم.

تعریف و مفهوم سختی یک عضو:

برای فهم بهتر مفهوم سختی، به یک فنر دقت می‌کنیم.

با رابطه‌ی $P=K\Delta$ آشنا هستیم. به اندازه‌ای که نیروی P را افزایش دهیم، Δ بیشتر می‌شود.
اما در این رابطه یک پارامتر بسیار مهم به نام K وجود دارد. K سختی فنر است و به جنس فنر ربط دارد.
هرچقدر K بیشتر باشد به ازای نیروی مشخص Δ (جابه‌جایی) کمتر می‌شود. یعنی بین دو فنر که $K_2>K_1$

سختی فنر B   سختی فنر A

به ازای نیروی معین P چون فنر B سخت‌تر است ($K_2>K_1$)، Δ_2 کوچکتری خواهد داشت. پس می‌توان گفت که سختی مفهومی است که یعنی هرچه فنر سخت‌تر در مقابل جابه‌جایی (Δ)، مقاوم‌تر است.

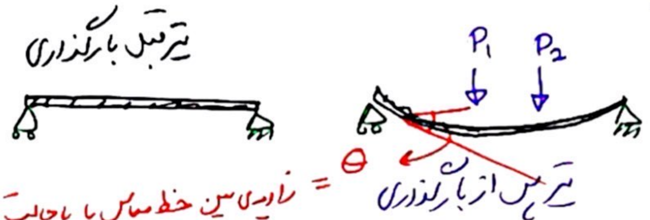
پس مفهوم سختی (K) یعنی مقاومت در برابر جابه‌جایی (Δ) و مشخص است که سختی (K) نسبت عکس با جابه‌جایی (Δ) دارد.

بحث فنر، اعمال نیروی محوری (نیروی هم‌جهت با راستای فنر) بود و بالطبع جابه‌جایی نیز محوری بود.

دقیقاً همانند همین بحث سختی را در المان‌های سازه‌ای مانند تیر داریم.

اما سختی نه از نوع محوری بلکه از نوع خمشی.

وقتی یک تیر تحت یک لنگر قرار می‌گیرد تیر دچار خمش می‌شود یعنی نقطه به نقطه آن نسبت به افق دارای زاویه می‌شوند.



θ = زاویه‌ی بین خط مماس با حالت اولیه تیر (خط افق)
θ یا دوران تیر نامیده می‌شود.

(در استاتیک و تحلیل ۱ خواندیم)
P_1 و P_2 در تیر لنگر ایجاد می‌کنند و تیر تحت خمش قرار می‌گیرد.

اکنون بحث سختی خمشی پدید می‌آید به این معنا که هرچه سختی خمشی بیشتر باشد تیر کمتر خم می‌شود و θ کوچک‌تر خواهد بود. (دقیقاً مانند بحث K و δ در فنر)، اینجا بحث EI (سختی خمشی) و θ (دوران) را داریم.

لذا آنچه در تیر در مقابل چرخش تیر مهم است بحث سختی خمشی است که آن را بحث خواهیم کرد.

پس می‌توان سختی خمشی یک عضو را اینگونه تعریف کرد که مقدار لنگر خمشی مورد نیاز برای ایجاد دورانی به اندازه‌ی واحد در تکیه‌گاه مفصلی. هیچ بارگذاری غیر از لنگر وجود ندارد و طرف دیگر عضو هم گیردار است. نشست تکیه‌گاهی هم نداریم.

$\theta = 0$ تکیه‌گاه گیردار

پس طبق روابط شیب افت M را می‌یابیم.

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + FEM_{AB}$$

$\theta_A = 1$ (دوران واحد)

نشست تکیه‌گاهی نداریم ← $\psi = 0$

که بار خارجی نداریم ← $FEM = 0$

$$\Longrightarrow M_{AB} = \frac{4EI}{L}$$

و اصل روش پخش لنگر بر این اصل استوار است که هر که بامش بیش برفش بیشتر.

از مقدار لنگری که به یک گره وارد می‌آید هر عضوی که سختی بیشتری دارد سهم بیشتری از لنگر وارد بر گره را برمی‌دارد.

* سختی دورانی هر گره :

برابر است با حاصل جمع سختی دورانی همه‌ی اعضایی که به آن گره متصل هستند.

$$K_1 + K_2 + \dots + K_n = K_t$$

سختی کل گره

total

سختی خمشی عضو اول متصل به گره مورد نظر

سختی خمشی عضو دوم متصل به گره

سختی خمشی عضو n ام متصل به گره

* سختی نسبی هر عضو متصل به گره نسبت به کل گره :

$$DF = \frac{K_{member}}{K_{total}}$$

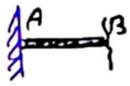
با نماد DF (Distribution Factor) نمایش می‌دهیم.

درواقع سهم هر عضو نسبت به کل گره را نشان می‌دهد.

* برای اینکه بخواهیم لنگر خمشی را میان اعضای متصل به یک گره محاسبه کنیم باید با استفاده از مفهوم سختی‌های دورانی، ضریبی به نام DF را محاسبه کنیم که به عضوی که سختی بیشتری دارد لنگر خمشی بیشتر بدهیم و به عضوی که سختی خمشی کمتری دارد، لنگر خمشی کمتری بدهیم. DF را ضریب پخش می‌نامیم.

سختی خمشی های خاص :

۱. اتصال گیردار



تعریف اتصال گیردار این است که آنقدر قوی و صلب است که عضو متصل به آن حتی ذره‌ای دوران نمی‌کند. این اتصال دارای سختی خمشی ∞ است. پس اگر بخواهیم برای عضو متصل به اتصال گیردار، سختی خمشی را حساب کنیم خواهیم داشت :

(مثلاً سختی خمشی عضو AB را K فرض کنیم. K عددی است معلوم)

① سختی گره $K_t = K + \infty = \infty$

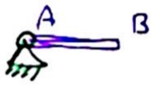
② $DF_{AB} = \dfrac{K_{AB}}{K_t} = \dfrac{K}{\infty} = \dfrac{\text{عدد}}{\infty} =$ $\boxed{\text{صفر}}$

یعنی اگر عضوی به تکیه‌گاه گیردار متصل باشد و لنگری به این نقطه وارد شود، همه‌ی لنگر، سهم اتصال می‌شود و خود عضو هیچ سهمی را نمی‌برد و سهمش از لنگر صفر است

پس داریم

$$DF_{\text{هر عضو متصل به اتصال گیردار}} = 0$$

۲. اتصال مفصلی



طبق تعریف اتصال مفصلی به عضوی که به آن وصل است اجازه‌ی چرخش می‌دهد و در واقع در مقابل خمش (دوران) هیچ مقاومت و سختی ندارد و در واقع سختی خمشی اتصال مفصلی صفر است.

$K_{\text{تکیه‌گاه}} = 0$

در نقطه‌ی A یک مفصل (اتصال مفصلی) داریم و یک عضو AB با سختی خمشی مشخص K .

اگر بخواهیم برای این نقطه (گره) K_t بدست آوریم داریم :

$$K_t = K_{\text{تکیه‌گاه}} + K_{AB} = 0 + K = K$$

DF را برای عضو AB به دست می‌آوریم.

$$DF_{AB} = \frac{K_{AB}}{K_t} = \frac{K}{K} = 1$$

DF=1 شد یعنی هر لنگری که به این گره وارد شود تکیه‌گاه مفصلی هیچ سهمی بر نمی‌دارد و همه‌اش را عضو AB تحمل می‌کند و بر می‌دارد.

در بقیه اعضای متصل به یک گره هر عضو سهم متناسب با سختی خود را برمی‌دارد.

پس از یافتن FEM و DF ها جدولی تنظیم می‌کنیم بدین ترتیب که:

مثلاً

	A		B		C
DF	0 (DF_{AB})	0.545 (DF_{BA})	0.455 (DF_{BC})	0 (DF_{CB})	
FEM	FEM_{AB}	FEM_{BA}	FEM_{BC}	FEM_{CB}	
DM		II	I		

① در این ردیف گره‌ها را می‌نویسیم.

② در این ردیف DF ها را می‌نویسیم.

③ در این ردیف FEM را می‌نویسیم.

④ در این مرحله FEM دو طرف هر گره را با هم جمع می‌زنیم و قرینه عدد بدست آمده را یکبار در DF راست گره ضرب می‌کنیم در جایگاه I می‌نویسیم و یکبار در DF چپ گره ضرب می‌کنیم در ردیف DM چپ گره می‌نویسیم جایگاه II

DM: Distributed Moment

به لنگری که در گام 4 می‌نویسیم لنگر متعادل کننده می‌گوییم.

⑤ اکنون عددهای I و II را منتقل می‌کنیم. عدد I را با ضریب انتقالی $\frac{1}{2}$ اگر انتهای دیگر گیردار است منتقل می‌کنیم.

$(COF = \frac{1}{2})$ Carry Over Factor

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

و اگر انتهای دیگر مفصلی است با $COF = 0$ با ضریب انتقال صفر. (یعنی انتقال نمی‌یابد).

Carry Over Moment — لنگر انتقال یافته را COM می‌نامیم.

6) اکنون با این لنگری که انتقال یافت، تعادل گره به هم خورد، دوباره لنگر متعادل کننده در گره را اضافه می‌کنیم به گره البته با ضرب ضریب DF در هر طرف گره عدد مخصوص به خود را می‌نویسیم.

$$DF \times Com = \dots = DM$$

7) اکنون دوباره لنگر توزیع شده را با COF به گره‌های کناری منتقل می‌کنیم، لنگر منتقل شده دوباره تعادل را به هم می‌زند و دوباره لنگر متعادل کننده در گره می‌نویسیم و ...

8) عملیات قبل را تا حدی ادامه می‌دهیم که عدد اضافه شده به عنوان لنگر متعادل کننده بسیار ناچیز شود. (مثلاً زیر 0/01).

9) حال عددهای هر ستون را با هم جمع می‌کنیم تا لنگر آن قسمت سازه معلوم شود.

10) باید جمع عدد دو طرف یک گره با هم صفر شود یا عددی بسیار کوچک!

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

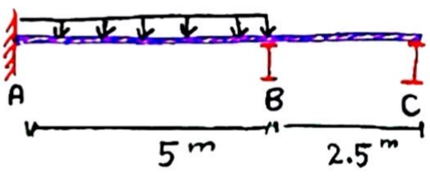
موضوع : عکس العمل تکیه گاهی به روش پخش لنگر

نام : محمدحسین آمری وزد

درس : تحلیل سازه ی ۲ / استاد : دکتر ستار میرزا محمدی / شماره دانشجویی : ۹۸۴۴۳۰۰۰۱۰۰

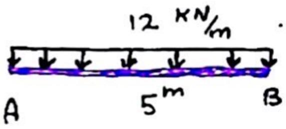
صفحه 32 جزوه

تمرین 6: در شکل زیر، عکس العمل های تکیه گاهی را به روش پخش لنگر حساب کنید.



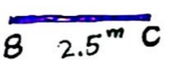
این تکیه گاه غلتکی عمل می کند پس لنگر گیر نیست!

حل: گام اول : یافتن FEM :



$$FEM_{AB} = \frac{-wL^2}{12} = -\frac{12\,(5)^2}{12} = -25 \ \text{KN.m}$$

$$FEM_{BA} = 25 \ \text{KN.m}$$



$FEM_{BC} = 0$ و $FEM_{CB} = 0$ روی BC هیچ باری نیست.

گام دوم : محاسبه ی سختی نسبی اعضا و ضرایب توزیع لنگر و ضریب انتقال لنگر. چون E در همه ی اعضا ثابت است در محاسبات کنار می گذاریم.

$$K_{AB} = \frac{I}{L} = \frac{I}{5}$$

$$K_{BC} = \frac{I}{L} = \frac{I}{2.5}$$

$$\rightarrow DF_{BA} = \frac{K_{AB}}{K_B} = 0.33 \qquad K_{AB} \rightarrow I/5, \quad K_B \rightarrow I/5 + I/2.5$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_B} = 0.66 \qquad K_{BC} \rightarrow I/2.5, \quad K_B \rightarrow \frac{I}{5} + \frac{I}{2.5}$$

$0.33 + 0.66 = 1$ مجموع DF در هر گره یک است.

مفهوم توزیع لنگر: اگر در یک نقطه، گره سازه، لنگری وارد کنیم و با فرض پایدار بودن سازه، اعضای متصل به این گره، هرکدام با توجه به تحمل شان (سختی شان $\frac{EI}{L}$) بخشی از این لنگر را تحمل می کنند.

$DF_{AB} = 0$

$DF_{CB} = 1$

گره A گیردار B C مفصل

گام سوم: ترسیم جدول

عضو	AB	BA	BC	CB
DF	0	0.33	0.66	1
FEM	-25	25	0	0
DM		-8.25	-16.5	
COM	-4.1			-8.25
DM				+8.25
COM			4.1	
DM		-1.333	-2.706	
COM	-0.68			-1.36
DM				+1.36
COM			0.7	
DM		-0.24	-0.48	
COM	-0.1			-0.24
DM				+0.24
			0.1	
	-29.88	14.97	-14.78	0

در جدول فوق ملاحظه می‌کنیم که تقریباً برآیند لنگر چپ و راست B، صفر می‌باشد پس

هرکدام اعداد فوق را با کمی تقریب (و تقسیم) به عنوان لنگر می‌پذیریم!

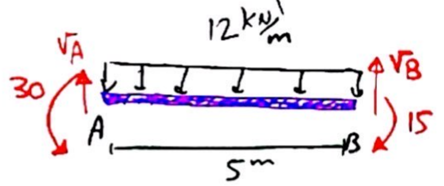
$M_{AB} = -30$ $M_{BA} = 15$ $M_{BC} = -15$ $M_{CB} = 0$

COM: Carry-Over moment لنگر انتقالی

DM: Distributed Moment: لنگر توزیع‌شده

تمرین 6 سازه ۲

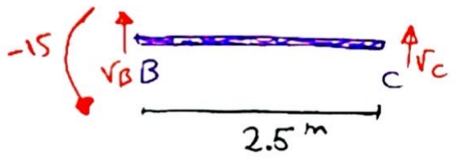
گام چهارم: اکنون با به دست آوردن لنگرها در دو سر هر عضو به محاسبه‌ی نیروهای تکیه گاهی می‌پردازیم.



$$\Sigma M_A = 0 : 15 - 30 + (12 \times 5^{m}) \times 2.5^{m} - V_B\,(5^{m}) = 0$$

$$\boxed{V_B = 27\ kN} \longrightarrow \Sigma F_y = 0 \longrightarrow V_A + \cancel{V_B}^{27} + (-5 \times 12) = 0$$

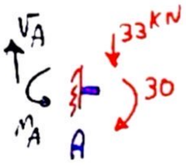
$$V_A = 33\ kN$$



$$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow -15 - 2.5\,(V_C) = 0 \longrightarrow V_C = -6\ kN$$

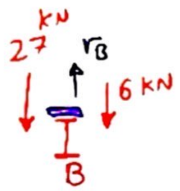
$$\longrightarrow V_B = 6\ kN$$

محاسبه‌ی نیروهای تکیه گاهی

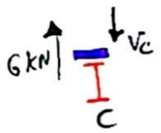


$$\longrightarrow \Sigma M_A = 0 \quad M_A = 30\ kN \cdot m$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V_A = 33\ kN$$



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V_B = 6^{k} + 27^{kN} = 33\ kN$$



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V_C = 6\ kN$$

توجه داریم که در محاسبات بالا

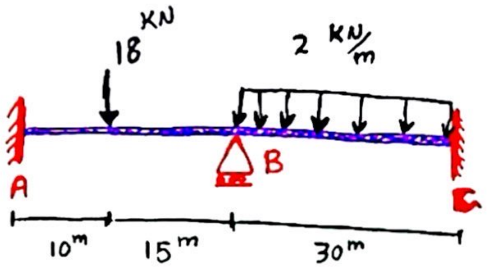
موضوع : روش پخش لنگر

نام : محمدحسین کدی زاد

درس: تحلیل سازه‌های ۲ / استاد : دکتر سجاد میرزا محمدی

شماره دانشجویی : ۹۸۴۴۳۰۰۱۰۰

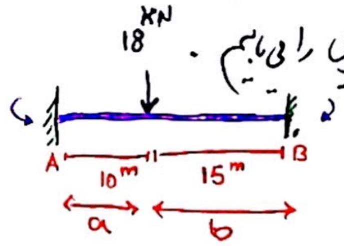
تمرین اضافی ۶: تیر ۲ دهانه‌ی نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از روش پخش لنگر تحلیل کرده، لنگرهای خمشی انتهای اعضا را بیابید: $EI = cte$



1

حل : گام اول : پس از تقسیم تیر به دو قسمت AB و BC ، FEM ها را بدست می‌آوریم.

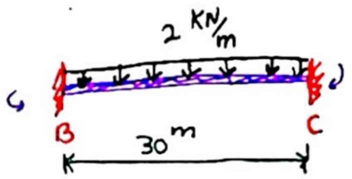
همان طور که می‌دانیم برای یافتن FEM ، دو انتهای عضو را گیردار کرده و لنگرهای انتهایی را می‌یابیم.



$$FEM_{AB} = \frac{-Pab^2}{L^2} = \frac{-18^{KN} \times 10^m \times 15^{m^2}}{25^2} = -64.8^{KN.m}$$

ساعتگرد + است.

$$FEM_{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{18 \times 10^{m^2} \times 15^m}{25^2} = 43.2^{KN.m}$$



$$FEM_{BC} = \frac{-wL^2}{12} = \frac{-2(30)^2}{12} = -150^{KN.m}$$

$$FEM_{CB} = 150^{KN.m}$$

گام دوم : محاسبه‌ی سختی نسبی اعضا و ضرایب توزیع لنگر و ضریب انتقال لنگر :

سختی نسبی اعضا از رابطه‌ی $\frac{EI}{L}$ بدست می‌آید، E در همه‌ی تیرها یکسان و ثابت است پس می‌توان سختی همه‌ی اعضا را $\frac{I}{L}$ در نظر گرفت. پس داریم :

$$K_{AB} = \frac{I}{L} = \frac{I}{25^m}$$

$$K_{BC} = \frac{I}{L} = \frac{I}{30^m}$$

تمرین اضافی ۶ تمرین ۸ بخش ۲

ضریب توزیع لنگر (Distribution Factor) عددی است که نسبت سختی هر عضو را به نسبت مجموع سختی همه‌ی اعضای متصل به آن گره می‌سنجد.

$$DF_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sum K_{ij}}$$

چون هر عضو دو انتها دارد، ضریب توزیع برای هر عضو دوباره محاسبه می‌شود مثلاً: DF_{BA} و DF_{AB}

سختی این عضو تقسیم بر مجموع سختی‌های اعضای متصل به گره

این عضو به این گره وصل است که (A) حرف اول

در هر گره مجموع مقادیر DF همیشه برابر یک است.

نکته *

$$\boxed{DF_{AB} = 0}$$

نکته: این عضو (AB) به تکیه‌گاه گیردار A متصل است. تکیه‌گاه A همه‌ی لنگرها را تحمل می‌کند. لذا از آنجایی که تکیه‌گاه گیردار A، انعطاف‌ناپذیر است لنگرها را در نقطه‌ی A به طور کامل جذب می‌کند و هیچ سهمی به عضو نمی‌رسد. چراکه تکیه‌گاه گیردار از نظر سختی بی‌نهایت فرض می‌شود. یعنی تحمل صد در صد دارد. اگر در این نقطه، لنگری وارد شود، عضو هیچ لنگری بر نمی‌دارد. تمام لنگر سهم تکیه‌گاه است.

سختی عضو BA

$$DF_{BA} = \frac{I/25}{I/25 + I/30} = 0.545$$

سختی همه‌ی اعضایی که به گره B وصل هستند

$DF_{CB} =$

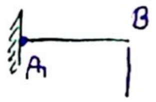
$$DF_{BC} = \frac{I/30}{I/25 + I/30} = 0.455$$

همان طور که گفته شد مثلاً در گره B، دو مقدار DF داریم که جمع مقادیر آن یک است:

$$DF_{BA} + DF_{BC} = 0.455 + 0.545 = 1$$

ضریب انتقال لنگر: این ضریب برای منتقل کردن لنگر از یک سر عضو به سر دیگر آن است. اگر سری که می‌خواهیم لنگر را به آن منتقل کنیم گیردار است این عدد برابر COF = 0.5 است. اگر سری که می‌خواهیم لنگر را به آن منتقل کنیم مفصلی است، COF = 0 باشد.

توضیح تکمیلی سختی دورانی: به عنوان مثال در نقطه‌ی A که گیردار متصل است:



گره A از یک طرف به صورت گیردار به تکیه‌گاه وصل است و از طرفی نیز به عضو AB وصل است؛

می‌دانیم که سختی تکیه‌گاه گیردار ∞ است و عضو AB را K در نظر می‌گیریم؛ پس

یعنی با وارد آمدن نیرو هیچ‌گونه تغییر زاویه نخواهیم داشت.

$$K_A = \underset{\text{تکیه‌گاه گیردار}}{\infty} + \underset{\text{عضو متصل به تکیه‌گاه A}}{K_{AB}} = \infty$$

لنگر

و چون عضو AB با سختی مشخص از یک طرف به گره A وصل است و از طرفی A به گیردار با ضریب سختی ∞ متصل است پس

$$D_{AB} = \frac{K_{AB}}{\infty} = 0$$

$$DF_{member} = \frac{K_{member}}{K_{\text{گره}}}$$

$K_{\text{گره}} = K_{member 1} + K_{member 2} + \cdots + K_{\text{تکیه‌گاه‌های اضافی سازه}}$

2

گام دوم : ترسیم جدول :

گره	A	B		C
عضو	AB	BA	BC	CB
DF	0	0.545	0.455	0
FEM	-64.8	43.2	-150	150
DM	0	58.2	48.6	0
COM (لنگر انتقالی یا ...)	29.1			24.3
DM	0	0	0	0
لنگر نهایی	-35.7	101.4	-101.4	174.3
	M_{AB}	M_{BA}	M_{BC}	M_{CB}

مال عضو گیردار A

$\times COF = \frac{1}{2}$

0×150 DF FEM

OF — 0×29.1

لنگر متعادل کننده در هر گره.

حاصل جمع ستون بالای خود =

$-64.8 + 29.1$; $(43.2 + 58.2) + 0$; $(-150 + 48.6) + 0$; $= 150 + 24.3$

① ابتدا مانند جدول بالا را رسم می‌کنیم به تعداد دهانه‌ها، این جدول ستون دارد. ردیف یک نام گره‌ها (تکیه‌گاه‌ها) را می‌نویسیم، و هر چهار ردیف دقیقاً پر می‌شود.

② به سراغ گره میانی می‌رویم. مشخص است با جمع مقادیر دو طرف گره، 43.2 و -150 در این گره تعادل برقرار نیست. از جمع این دو عدد -150 + 43.2 متوجه می‌شویم که $-150 + 43.2 = -106.8$ در این گره عدم تعادل وجود دارد. اکنون با اضافه کردن لنگر متعادل کننده برابر و قرینه‌ی عددی که به عنوان عدم تعادل (-106.8) وجود داشت در این گره باید اضافه کنیم تا به تعادل برسد:

$-(-106.8) \longrightarrow$ این عدد باید به گره B اضافه شود

نحوه‌ی اضافه کردن لنگر تعادل به گره به این صورت است که باید این عدد را 106.8 را در DF هر طرف گره ضرب کنیم و عدد به دست آمده را در هر طرف گره به عنوان لنگر متعادل کننده اضافه کنیم.

این عدد را باید در سطر بعدی جدول (سطر 5) اضافه کنیم:

لنگر متعادل کننده

$106.8 \times 0.545 = 58.2$ (DF_{BA})

$106.8 \times 0.455 = 48.6$ (DF_{BC})

قابل ذکر است که در دو نقطه A و C نیازی به اضافه کردن لنگر متعادل کننده نیست چرا که تکیه‌گاه گیردار در برابر لنگرها مقاومت لازم را دارد.

تمرین اضافی ۶

۳) حال با توجه به اینکه روی هر یک از اعضا متصل به این گره ، لنگر اضافی پدید آمد ، باید با استفاده از ضریب انتقال لنگر ، این لنگر را به سر دیگر عضو اعمال کنیم .

به این ترتیب که پس از ضرب کردن ضریب انتقال لنگر (COF) در لنگر متعادل کننده ، عدد بدست آمده را در ستون سر دیگر عضو می نویسیم .

در عضو AB $COF = \frac{1}{2}$ و هم چنین در عضو BC نیز $COF = \frac{1}{2}$ می باشد. (COF برای انتقال لنگر به سر گیردار = 0.5 و COF برای انتقال لنگر انتهای مفصلی = 0 می باشد.)

$$B \text{ چپ گره} = 58.2 \xrightarrow[\text{انتقال به راست A}]{\times COF = \frac{1}{2}} 58.2 \times \frac{1}{2} = 29.1$$

$$B \text{ راست گره} = 48.6 \xrightarrow[\text{انتقال به چپ C}]{\times COF = \frac{1}{2}} 48.6 \times \frac{1}{2} = 24.3$$

* سطر ششم جدول را پر می کنیم .

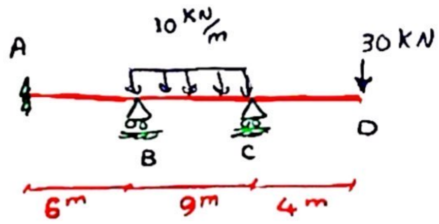
٤) اعداد نوشته شده در مرحله قبل در جدول ، پایان کار است چون DF این دو ستون = صفر است .

کار به پایان رسیده است .

اکنون باید حاصل جمع ردیف های FEM و DM و COM را در هر ستون جمع کرد و به عنوان لنگر نهایی آن قسمت در ردیف آخر یادداشت کنیم .

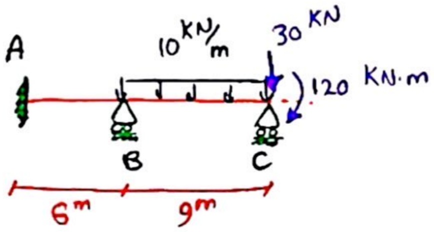
تمرین اضافی ٦ سازه ۲

مثال ۴۳: به روش پخش لنگر سازه را تحلیل کنید.



EI ثابت

حل: گام اول: برای راحتی کار قسمت کنسول سازه را (CD) حذف می‌کنیم و بار انتهای آن به همراه لنگری که ایجاد می‌کند را به ابتدای کنسول (نقطه‌ی C) منتقل می‌کنیم.

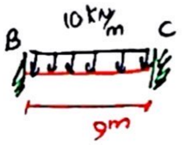


$(= 4^m \times 30^{KN})$

گام دوم: محاسبه‌ی لنگرهای گیرداری FEM:

باری روی این قسمت نیست!

$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = 0$$



$$FEM_{CB} = -FEM_{BC} = \frac{qL^2}{12} = \frac{(10)(9)^2}{12} = 67.5\ KN.$$

در محاسبه‌ی لنگر گیرداری فقط و فقط بارهایی که روی عضو هستند (در طول عضو) ایجاد این لنگرها را می‌کنند و بارهای وارده در محل تکیه‌گاه لنگر گیرداری ایجاد نمی‌کنند و آن را در نظر نمی‌گیریم.

گام سوم: محاسبه‌ی سختی‌های نسبی و ضرایب DF:

نکته: درصورتی که تکیه‌گاه انتهایی از نوع مفصلی باشد، سختی دورانی سمت دیگر عضو در عدد $\frac{3}{4}$ ضرب می‌شود.

$K_{AB} = 0$ قسمت عضو در مجاورت تکیه‌گاه گیردار

$K_{BA} = \frac{4EI}{6}$

$K_{BC} = \frac{4EI}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{EI}{3}$ تکیه‌گاه مفصلی

$K_{CB} = 1$ قسمت عضو در مجاورت تکیه‌گاه ساده

$K_{t,B\ گره} = \frac{2EI}{3} + \frac{EI}{3} = EI$

$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{t,B\ گره}} = \frac{2EI/3}{EI} = \boxed{2/3}$

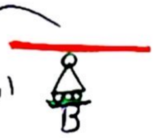
$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{t,B\ گره}} = \frac{EI/3}{EI} = \boxed{1/3}$

گام چهارم :

ضرایب انتقال لنگر : COF در هر عضو دو ضریب انتقال لنگر داریم یک ضریب برای انتقال لنگر از ابتدا به انتها و دیگری برعکس آن یعنی ضریبی برای انتقال لنگر از انتها به ابتدا.

در عضو BC ، چون انتهای C مفصلی است ، ضریب انتقال لنگر برای انتقال از B به C ، صفر است.

ولی برای انتقال از C به B چون انتهای B عضوی پیوسته است و ادامه دارد،



عضو یکسره است و ادامه دار و پیوسته، پس لنگر از این طرف B به آن طرف منتقل شود. ← اعضای پیوسته هر طرف برای طرف دیگر نقش انتقال لنگر را (مثل گیردار) ایفا کنند.

پس COF برای C به B = 0.5 .

COF برای انتقال از B به A چون A گیردار است، 0.5 می‌باشد و بالعکس نیز از A به B ، 0.5 است

ولی به $COF_{A\to B}$ نیازی نخواهد بود.

جدول را رسم و محاسبات را آغاز می‌کنیم :

	گره A	گره B		گره C	
اعضا →	AB	BA	BC	CB	CD
DF	0	2/3	1/3	1	
FEM	0	0	-67.5	67.5	-120
×DF ↓ DM		67.5×2/3 = 45	67.5×1/3 = 22.5	52.5	$(-(-120+67.5))\times 1 = 52.5$
COF	×0.5 ←			0.5 ←	
COM	22.5		26.3		
×DF ↓ DM	0	-17.5	-8.8		
	×(0.5) ←				
COM	-8.8				
لنگر نهایی	13.7	27.5	-27.5	126	-126

بعد از این که FEM ها را نوشتیم اکنون باید هر گره را متعادل کنیم.

به سراغ گره B می‌رویم. FEM_B برابر -67.5 و FEM_{BA} برابر صفر است.

مشخص است که گره متعادل نیست. برای تعادل باید مجموع لنگرهای موجود در گره صفر باشد.

در اینجا جمع لنگرها -67.5 ($0+(-67.5)=$) است. پس الان گره نامتعادل است.

برای متعادل کردن گره باید $+67.5$ به این گره (B) افزود.

اما این $+67.5$ را چگونه باید اضافه کنیم؟

باید 67.5 را یکبار در DF_{BC} ضرب کنیم. بار دیگر در DF_{BA}.

(در واقع باید در DF های دو طرف گره ضرب شود.)

قطعاً جمع مقادیر بدست آمده $+67.5$ است. این اعداد را دقیقاً زیر ستون خود عضو در DF مربوط می‌نویسیم. اکنون گره به تعادل رسیده است. مثلاً عدد 45 روی قسمت BA نوشته شده است.

اکنون باید اثر این عدد 45 را روی سر دیگر تیر یعنی AB منتقل کنیم. پس باید عدد 45 را در ضریب انتقال لنگر (cof) که در اینجا 0.5 است ضرب کنیم ($45\times0.5=22.5$) و لنگر انتقالی را روی AB اثر می‌دهیم یعنی روی گره A. البته اگر گره A دو سمت داشت. در دو طرف با توجه به DF باید لنگر را توزیع می‌کردیم.

به این ترتیب مرحله به مرحله لنگر را توزیع می‌کنیم و سپس با ضریب cof به سمت دیگر تیر می‌بریم و توزیع می‌کنیم و این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم تقریباً دو طرف گره‌ها اعدادی باشند که به تعادل رسیده باشد.

در بعضی سؤالات خاص روش پخش لنگر می توانیم حجم محاسبات را کاهش دهیم و با سرعت بیشتری مسائل را حل کنیم.

لازم است ابتدا به هندسه ی مسئله دقت کرده و در صورت مشاهده ی یکی از حالات زیر ضریب سختی اعضا با رابطه ی اصلاح شده محاسبه می شود.

حالت اول: در صورتی که تکیه گاه انتهایی از نوع مفصلی باشد، سختی دورانی عضو متصل به این تکیه گاه از رابطه ی $K = \frac{3EI}{L}$ به دست می آید.

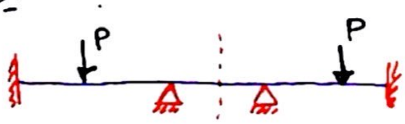
حالت دوم: هندسه و بارگذاری متقارن

هرگاه هندسه و بارگذاری تیر، هر ۲ متقارن باشد، نمودار لنگر خمشی آن هم متقارن خواهد بود.

بنابراین می توان تحلیل نیمی از تیر را انجام داد و مقادیر بدست آمده را برای نیم دیگر آن استفاده کرد.

سختی خمشی دهانه ی میانی درونی (دهانه ی وسطی) از رابطه ی زیر بدست می آید:

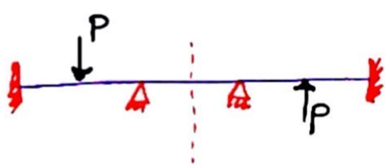
$$K = \frac{2EI}{L}$$



سازه متقارن است. هم در هندسه و هم در بارگذاری. آن را دو قسمت می کنیم و فقط محاسبات را برای یکی از قسمت ها انجام می دهیم.

حالت سوم: هندسه ی سازه متقارن باشد، اما بارگذاری پادمتقارن باشد. در این حالت ضریب سختی عضو میانی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$K = \frac{6EI}{L}$$



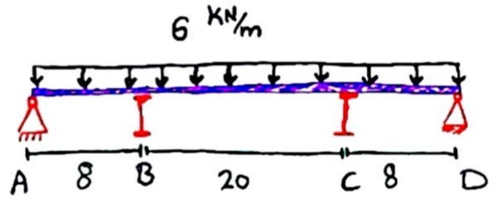
موضوع : روش پخش لنگر در تیر متقارن

نام : محمد حسین آمری فرد

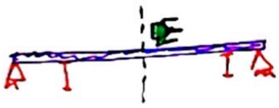
درس : تحلیل سازه ی ۲ / استاد : دکتر سجاد میرزا محمدی / شماره دانشجویی : ۹۸۴۴۳۰۰۰۱۰۰

جزوه ص 36

تمرین ①: مقادیر لنگر خمشی در نقاط B و C از تیر زیر را به روش پخش لنگر محاسبه کنید.



حل: با توجه به نوع سازه درمی‌یابیم که سازه تقارن دارد (از نظر شکل هندسی) یعنی اگر دقیقاً وسط BC، خط عمودی رسم کنیم. سازه دقیقاً به ۲ بخش همانند هم تقسیم می‌شود.

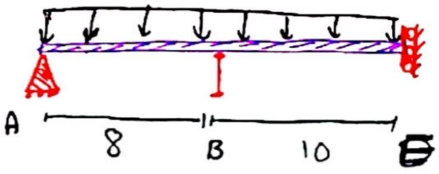


از نظر بارگذاری هم چون بار گسترده است، بارگذاری نیز متقارن است.

در سازه های متقارن (هم هندسه و شکل متقارن دارند و هم بارگذاری متقارن دارند) می‌توانیم سازه را نصف کنیم و سازه ی نصف شده را تحلیل کنیم و در انتها هر آن چه برای این نیمه ی سازه بدست آمد، بصورت آینه وار برای نیمه ی دیگر تعمیم می‌دهیم.

نکته ی مهم در تیر بالا این است که هنگامی تیر نصف می‌شود عضو BC بخشش نصف می‌شود. و در محلی که نصف شده است تکیه گاه غلتکی قرار دهیم.

نصف سازه :



گام اول : یافتن K و DF .

در حل تیرهای متقارن (با تعداد دهانه فرد) چون عضو وسط نصف می‌شود باید برای محاسبه‌ی سختی آن (قسمت وسط در این سوال BC) سختی را اصلاح کنیم .

$$K'_{BC} = \frac{1}{2} K_{BC} = \frac{1}{2} \frac{4EI}{20} = \frac{1}{10} EI$$

نکته بسیار بسیار مهم دیگر این است که اگر انتهای تیر مفصلی باشد می‌توانیم سختی دورانی را در ۰/۷۵ (یا $\frac{3}{4}$) ضرب کنیم : $\boxed{K = \frac{3EI}{L}}$

پس برای عضو AB داریم :

$$K_{AB} = \frac{3EI}{L} = \frac{3EI}{8}$$

پس داریم :

$$DF_{BA} = \frac{K_{AB}}{K_{AB} + K_{BC}} = 0.789$$

$$BF_{BC} = 1 - DF_{BA} = 1 - 0.789 = 0.211$$

گام دوم : یافتن FEM :

$$FEM_{BC} = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{6\,(20)^2}{12} = -200$$

$$FEM'_{BA} = \frac{qL^2}{8} = \frac{6\,(8)^2}{8} = 48$$

اگر از ضریب اصلاح شده استفاده نکنیم FEM از رابطه $\frac{qL^2}{8}$ بدست می‌آید .

تمرین ۲ سازه ۲

گره	A	B		C
عضو	AB	BA	BC	CB
DF	1	0.789	0.211	0
FEM		48	-200	
DM		119.92	32.07	
جمع نهایی		167	-167	

بسیار مهم و جالب است که با یک مرحله توزیع لنگر، لنگر در گره B به تعادل رسید.

3

تمرین 7 سازه ۲.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

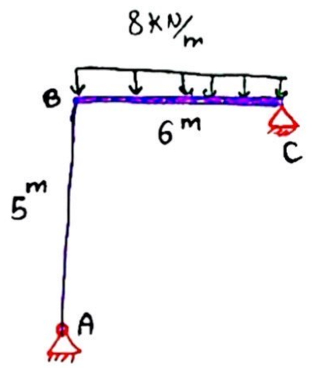
موضوع: روش پخش لنگر

نام: محمدحسین آجری‌ورز

درس: تحلیل سازه‌ی ۲ / استاد: دکتر سجاد میرزامحمدی / شماره دانشجویی: ۹۸۴۴۳۰۰۱۰۰

ص 38 جزوه

تمرین ⑧: مقادیر لنگر خمشی در نقطه‌ای B را به کمک روش پخش لنگر بدست آورید.



حل: گام اول: FEM در اعضا: روی عضو AB بار نیست ← $FEM_{AB} = 0$.

$$FEM_{BC} = \frac{-qL^2}{12} = -\frac{36\times 8}{12} = -24 \qquad FEM_{CB} = -FEM_{BC} = 24$$

گام دوم: محاسبه‌ی سختی نسبی اعضا، ضرایب توزیع لنگر

$$K_{BC} = \frac{I}{6} \qquad K_{BA} = \frac{I}{5}$$

$$DF_{BA} = \frac{I/5}{I/6 + I/5} = 0.55$$

اعضا متصل به گره‌ی B، BC و BA هستند. → $DF_{BC} = 1 - DF_{BA} = 1 - 0.55 = 0.45$

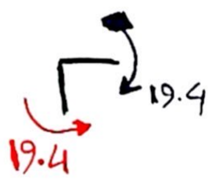
$DF_{AB} = 1$ ← چون به تکیه‌گاه مفصل وصلند. → $DF_{CB} = 1$

گام سوم : ترسیم جدول :

عضو // گره	A (AB)	B (BA)	B (BC)	C (CB)
DF	1	0.55	0.45	1
FEM	0	0	-24	24
DM		13.2	10.8	
COM	6.6			5.4
DM	-6.6			-27.4
COM		-3.3	-14.7	
DM		9.9	8.7	
COM	4.5			4
DM	-4.5			-4
COM		-2.25	-2	
DM		2.34	2.3	
COM	1.2			1.2
DM	-1.2			-1.2
COM		-0.6	-0.6	
		19.3	-19.3	

$\times \frac{1}{2}$

پس در گره B داریم :



تمرین ⑧ صفحه ۲

روش کانی

این روش در سال 1947 توسط Gasper Kani ابداع شده است.

می‌توان گفت یک روش بسیار هوشمندانه از روش شیب افت می‌باشد که یک الگوی تکراری برای اعمال روش شیب افت، ارائه می‌دهد. هدف اساسی در روش کانی محاسبه‌ی میزان لنگرخمشی ایجاد شده ناشی از شیب θ در تکیه‌گاه‌های میانی یک سازه است.

درنهایت پس از به دست آوردن مقادیر لنگرخمشی ناشی از شیب، لنگر خمشی در نقاط مختلف به دست می‌آید.

تذکر: جهت‌ های مثبت قراردادی در روش کانی همان جهت‌های روش پخش لنگر می‌باشد.

مزیت‌های این روش:

1. این روش دارای ساختاری برای حذف خطاست به طوری که خطاهای محاسباتی اگر اتفاق بیفتند، در عملیات بعدی به طور اتوماتیک حذف می‌شود.
2. اگر قاب کاملاً غیرمنتظم باشد یا از نظر جانبی دارای چندین درجه آزادی باشد، باز هم فقط یک جدول برای انجام همه‌ی محاسبات کافی است.

در روش شیب افت دیدیم که M_{AB} تابع سه متغیر θ_A ، θ_B ، ψ_{AB} است.

$$M_{AB} = f(\theta_A, \theta_B, \psi_{AB})$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}) + FEM_{AB}$$

$$\longrightarrow M_{AB} = \left(\frac{2EI}{L}\right)(2\theta_A) + \left(\frac{2EI}{L}\right)(\theta_B) - \left(\frac{2EI}{L}\right)(3\psi_{AB}) + FEM_{AB}$$

$$\longrightarrow M_{AB} = 2\left(\frac{2EI\theta_A}{L}\right) + \left(\frac{2EI\theta_B}{L}\right) - \left(\frac{6EI}{L}\psi_{AB}\right) + FEM_{AB}$$

فرمول شیب افت را تا اینجا ویرایش کردیم :

کل رابطه‌ی شیب افت

$\frac{2EI\theta}{L}$: لنگر ناشی از تغییر شیب (ناشی از به وجود آمدن شیب) . این لنگر را با نماد

M_{ij} نمایش می‌دهیم این لنگر شامل لنگرهای زیر می‌شود :

قسمت اول : M_{ij} : $M'_{ij} = \frac{2EI\theta_i}{L}$: لنگرخمشی که به خاطر تغییر شیب در تکیه‌گاه‌ها به وجود می‌آید.

$M''_{ij} = \frac{6EI\psi_{ij}}{L}$: لنگرخمشی که به خاطر نشست تکیه‌گاهی به وجود می‌آید.

پس M_{ij} را بازنویسی می‌کنیم ،

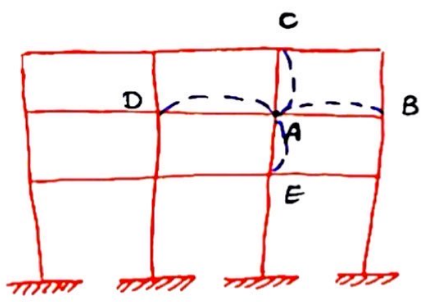
رابطه‌ی ۲ شیب افت

$$M_{ij} = 2M'_{AB} + M'_{BA} - M''_{AB} + FEM_{AB}$$

پس از مرتب کردن فرمول شیب افت مانند بالا به سراغ بدست آوردن فرمول کانی می‌رویم .

هدف اصلی روش کانی بدست آوردن لنگرخمشی ناشی از تغییر شیب در گره‌های (تکیه‌گاه‌های) میانی است . پس از بدست آوردن این مقادیر ، به سراغ محاسبه‌ی کل در نقاط مختلف می‌رویم .

* در قاب زیر فرض می‌کنیم تکیه‌گاه‌ها نشست جانبی ندارند. (قاب هم جابه‌جایی جانبی ندارد .)



چهار عضو AB ، CA و AD و AE در گره A به یکدیگر متصلند. اگر $\sum M_A = 0$ را بنویسیم

خواهیم داشت : $M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} + M_{AE} = 0$.

اکنون جای هرکدام از M ها در رابطه‌ی بالا ، رابطه‌ی ۲ شیب افت را جایگزین می‌کنیم.

ابتدا هرکدام از M ها را براساس رابطه 2 شیب افت بدست می آوریم :

سپس 4 M را با هم جمع می زنیم و مساوی صفر می گذاریم.

$$M_{AB} = 2M'_{AB} + M'_{BA} - M''_{AB} + FEM_{AB}$$

$$M_{AC} = 2M'_{AC} + M'_{CA} - M''_{AC} + FEM_{AC}$$

$$M_{AD} = 2M'_{AD} + M'_{DA} - M''_{AD} + FEM_{AD}$$

$$M_{AE} = 2M'_{AE} + M'_{EA} - M''_{AE} + FEM_{AE}$$

$$+ \quad \Sigma M = 0$$

اکنون شرط تعادل را در گره A می نویسیم و عبارات فوق را جایگذاری می کنیم :

$(B, C, D, E = j)$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} + M_{AE} = 0$$

$$2\Sigma M'_{Aj} + \Sigma M'_{jA} - \cancelto{0}{\Sigma M''_{Aj}} + \Sigma FEM_{Aj} = 0$$

چون جابه‌جایی‌ها به فرض سؤال صفر است پس $\Delta = 0 \rightarrow \Sigma M''_{Aj} = 0$

$$\Rightarrow \Sigma M'_{Aj} = -\frac{1}{2}\left(\Sigma M'_{jA} + \Sigma FEM_{Aj}\right) \; *$$

ازطرفی می‌دانیم سختی عضو AB یعنی K_{AB} برابر است با $K_{AB} = \frac{4EI}{L}$ و

داشتیم که

$$M'_{ij} = \frac{2EI}{L}\theta_i = \frac{1}{2}K_{ij}\theta_i$$

$$**$$

$$\Sigma M'_{Aj} = \frac{1}{2}K_{AB}\theta_A + \frac{1}{2}K_{AC}\theta_A + \frac{1}{2}K_{AD}\theta_A + \frac{1}{2}K_{AE}\theta_A$$

$$\frac{1}{2}\theta_A \underbrace{(K_{AB} + K_{AC} + K_{AD} + K_{AE})}_{K_A} = \frac{1}{2}K_A\theta_A$$

مجموع سختی اعضا در هر گره ، سختی گره نام دارد.

پس تا اینجا ۳ رابطه‌ی بسیار مهم داریم :

$$\text{I} \quad \Sigma M'_{AJ} = -\tfrac{1}{2}\left[\Sigma M'_{JA} + \Sigma FEM\right]$$

$$\text{II} \quad M'_{AB} = \frac{1}{2} K_{AB}\,\theta_A$$

$$\text{III} \quad \Sigma M'_{AJ} = \frac{1}{2} K_A\,\theta_A$$

این ۲ رابطه را برهم تقسیم می‌کنیم

$$\frac{M'_{AB}}{\Sigma M'_{AJ}} = \frac{\cancel{\tfrac{1}{2}} K_{AB}\,\cancel{\theta_A}}{\cancel{\tfrac{1}{2}} K_A\,\cancel{\theta_A}} = \frac{K_{AB}}{K_A}$$

$$\longrightarrow \frac{M'_{AB}}{\Sigma M'_{AJ}} = \frac{K_{AB}}{K_A} \xrightarrow[\text{کسر اول}]{\text{جایگذاری I در مخرج}} \frac{M'_{AB}}{-\tfrac{1}{2}\left[\Sigma M'_{JA} + \Sigma FEM\right]} = \frac{K_{AB}}{K_A}$$

$$\longrightarrow M'_{AB} = -\frac{1}{2}\,\frac{K_{AB}}{K_A}\left[\Sigma M'_{JA} + \Sigma FEM\right]$$

رابطه‌ی بالا رابطه‌ی اصلی روش کانی است ، می‌توان از K_A در مخرج از عبارت ΣK_{Aj} استفاده کرد.

* ضریب سهم چرخش یا ضریب کانی

ضریب چرخش که با U_{ij} نمایش می‌دهند، در واقع ، سهم هر یک از اعضای متصل به گره از آن گره است . سهم سختی آن عضو از کل سختی‌های متصل به گره !

$$U_{ij} = -\frac{1}{2}\,\frac{K_{Aj}}{\Sigma K_{Aj}}$$

این ضریب شباهت زیادی به ضریب پخش لنگر دارد.

روش حل سازه به روش کانی :

گام اول : در این روش هم مانند روش شیب افت و روش پخش لنگر باز هم ابتدا باید FEM ها بدست آوریم . یعنی بین هر دو گره یا تکیه گاه را جدا میکنیم ، دو سر آن را گیردار قرار میدهیم . از رابطه های FEM ، FEM ها را می یابیم .

گام دوم : سختی نسبی همه ی اعضا را از رابطه ی $سختی = K = \frac{4EI}{L}$ بدست می آوریم و

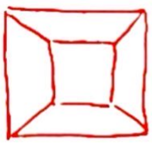
در گام بعد به سراغ ضریب کانی می رویم .

گام سوم : اصل مفهوم روش کانی در واقع سهم هر عضو از سختی کل گره ی متصل به عضو است .

یعنی لنگر موجود روی گره براساس ضریب سهم چرخش هر عضو تقسیم می شود .

ضریب سهم چرخش یا ضریب کانی سختی هر عضو نسبت به سختی کل گره در ضریب $-\frac{1}{2}$ است .

$$u_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{K_{ij}}{\sum K_j}$$

گام چهارم : سازه را رسم میکنیم و در هر گره دو کادر به مانند  جدولی می کشیم . روش پر کردن

این جدول در تمرین شماره ۹ (صفحات بعد) مفصلاً آمده است .

گام پنجم : پس از پر کردن جدول و جمع زدن آنها لنگر انتهایی اینگونه تعریف می شود :

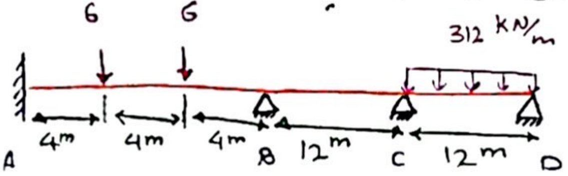
لنگر انتهایی = لنگر گیرداری همان انتها FEM + ۲ برابر دوران همان انتها + جزء دوران انتهای دور

موضوع : روش کانی در تیر نامعین

نام : محمد حسین امری فرد

درس : تحلیل سازه ی ۲ / استاد : دکتر سجاد میرزا محمدی / شماره دانشجویی : ۹۸۴۴۳۰۰۰۱۰۰

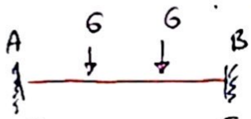
تمرین ۹. مقادیر لنگر خمشی در محل تکیه گاه های زیر را به روش کانی محاسبه کنید.



حل : گام اول : محاسبه ی FEM :

ابتدا تیر را به قسمت های AB و BC و CD تقسیم می کنیم و با فرض گیردار بودن دو انتها در هر قسمت ، FEM را داریم:

قسمت AB :



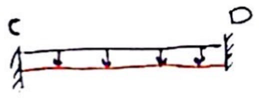
$FEM_{AB} = -\frac{2\times 6\times 12}{9} = -16$

$FEM_{BA} = 16$

قسمت BC :

$FEM_{BC} = 0$ $\quad FEM_{CB} = 0$

قسمت CD :



$FEM_{CD} = -\frac{wl^2}{12} = -54$ $\quad FEM_{DC} = 0$

گام دوم : محاسبه ی سختی دورانی هر عضو

در روش کنی نگر درباره ی سختی نسبی اعضا بحث شد ، ابتدا بایستی سختی در هر عضو (K) را بدست آوریم و در گام بعد موفق به نام ضریب کانی را داریم.

$K_{AB} = \frac{4EI}{12} = \frac{EI}{3}$

$K_{BC} = \frac{4EI}{12} = \frac{EI}{3}$

$K_{CD} = \frac{3EI}{12} = \frac{EI}{4}$

گام سوم: محاسبه‌ی سختی هرگره و سپس ضریب سهم چرخش یا ضریب کانی

سختی هرگره در واقع مجموع سختی اعضای متصل به گره و تکیه‌گاه آن گره‌ها باشد. مفهوم این سختی مانند مفهوم سختی در گره در روش پخش لنگری باشد، لذا توضیح این موضوع به آن جا رجوع شود. ΣK_j .

برای محاسبه‌ی ضریب کانی باید ضریب عضو مورد نظر را تقسیم بر ضریب گره کنیم. (آنرا × $-\frac{1}{2}$)

$$u_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{K_{Aj}}{\Sigma K_j}$$

$$u_{BA} = -\frac{1}{2} \frac{K_{AB}}{K_B} = -\frac{1}{2} \frac{EI/3}{\underbrace{EI/3 + EI/3}_{\text{سختی اعضای متصل به گره B}}} = -1/4$$

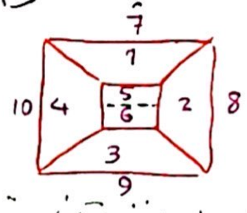
$$u_{BC} = -\frac{1}{2} \frac{K_{BC}}{K_B} = -\frac{1}{2} \frac{EI/3}{\underbrace{EI/3 + EI/3}_{\text{سختی اعضای متصل به گره B}}} = -1/4$$

$$u_{CB} = -\frac{1}{2} \frac{K_{CB}}{K_C} = \frac{EI/3}{EI/3 + EI/4} = 0.28$$

$$u_{CD} = -\frac{1}{2} \frac{K_{CD}}{K_C} = \frac{EI/4}{\frac{EI}{3} + \frac{EI}{4}} = -0.214$$

گام چهارم : رسم شمای تصویر و پر کردن جدول

در این مرحله ابتدا شکل تیر را می‌کشیم و در تکیه‌گاه‌های میانی (B و C) به جای رسم تکیه‌گاه مانند این شکل رسم می‌کنیم.

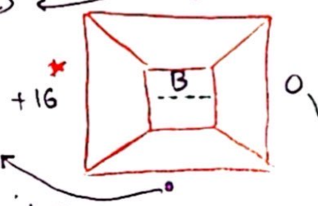


جای اعداد 1 تا 6 را مانند توضیحات تکمیل می‌کنیم.

ابتدا جای عدد 5 نام گره را می‌نویسیم.

به جای اعداد 7 تا 10 ، FEM هر قسمت را قرار می‌دهیم. مثلاً اگر بخواهیم برای گره B یادداشت کنیم تا اینجا خواهیم داشت.

در این نقطه چیزی نمی‌نویسیم چون سوال ما تیر است و B فقط از دو طرف راست و چپ به اعضای کناری خود وصل است. اگر B داخل یک قاب بود ممکن است در بالا و پایین خود به المان‌ای وصل بود و بدین ترتیب در بالا و پایین خود نیز FEM‌ای یادداشت می‌کردیم.



این عدد FEM_{BC} است چون C در سمت راست B قرار دارد.

* این عدد FEM_{BA} است که +16 بدست آمده بود.

اکنون نوبت پر کردن جایگاه 6 می‌باشد. اعداد نوشته شده در جایگاه‌های 7 و 8 و 9 و 10 را با هم جمع می‌کنیم و حاصل را باید با عددی (قرینه‌ی) جمع کنیم که مجموع 7 و 8 و 9 و 10 و (6) ـ صفر شود. در واقع

$$+ (7 + 8 + 9 + 10) = 6$$

(منظور از 10 عدد نوشته شده در جایگاه 10 است و قس علی هذا. این اعداد هم به همین ترتیب)

در واقع جایگاه عدد 6 ، گشتاوری است به اسم گشتاور متعادل کننده یعنی (قرینه‌ی) گشتاوری به این گره اضافه می‌کنیم که با توجه به FEM های نوشته شده ، گره را متعادل کند.

جایگاه‌های 1 تا 4 محل نوشتن u_{ij} هاست. مثلاً در جایگاه 1، عددی نوشته نمی‌شود چون گره B از بالا به هیچ المانی متصل نیست.

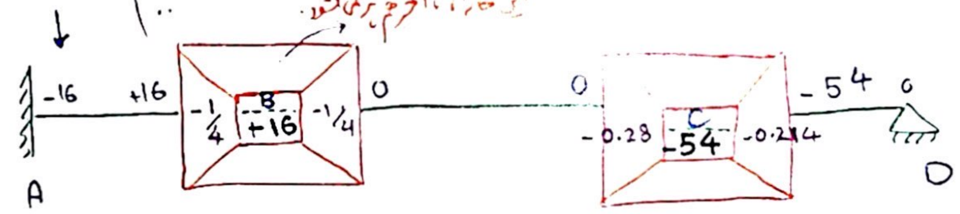
اما مثلاً در جایگاه شماره‌ی 2 ، باید u_{BC} نوشته شود. در واقع ضریب کانی عضو BC در اتصال به گره B.

به همین ترتیب در جایگاه شماره‌ی 3 چیزی نوشته نمی‌شود و در جایگاه شماره‌ی 4 ، u_{BA} نوشته می‌شود.

یعنی ضریب کانی عضو BA در اتصال به گره‌ی B.

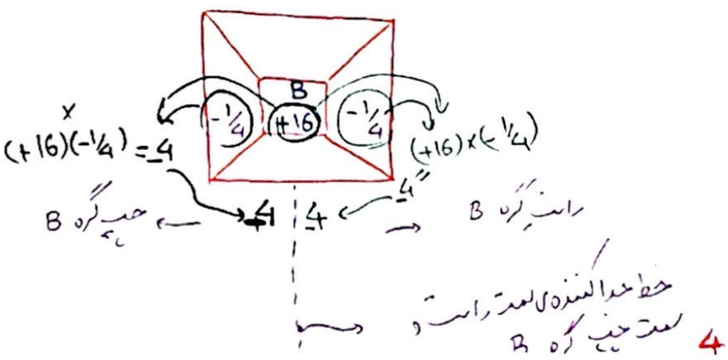
دقیقاً همانند همین شکل باید برای گره C با توضیحات مشابه رسم شود.

اکنون شکل شماتیک تیر را با اطلاعاتی که توضیح داده شد رسم می‌کنیم و ادامه می‌دهیم (بعد رسم المان‌های خالی) ..



حال باید از یکی گره‌ها شروع کنیم، مثلاً از گره B می‌آغازیم.

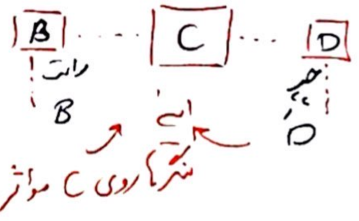
عدد +16 را که در داخل مربع قرار دارد، براساس ضرایب کانی بین سمت چپ و راست گره B تقسیم می‌کنیم یعنی قسمت هر کدام: $(+16)\times(-\frac{1}{4}) = -4$ می‌شود پس می‌نویسیم:



تمرین ۹ تکمیل شود.

حال با استفاده از اطلاعات گره B و ضرایبی که در گره C داریم ، ردیف زیر گره C را تکمیل می‌کنیم :

عدد داخل مربع که لنگر متعادل کننده بود (54-) را باید با دو عددی که روی آن موثرند یعنی سمت راست B و سمت چپ D به این ترتیب .



با 54- جمع می‌شود و عدد حاصل پس از ضرب در ضرایب های گره C هر کدام در زیر ضریب مربوط یادداشت می‌شود به این ترتیب :

$$-54 + (-4) + 0 = -58$$

لنگر D که مفصلی انتقال لنگر و صفر است.

که عدد متعادل کننده C که قبلاً بدست آمد و داخل C نوشته شد.

لنگر راست B که در گام قبلی همین مرحله بدست آمد

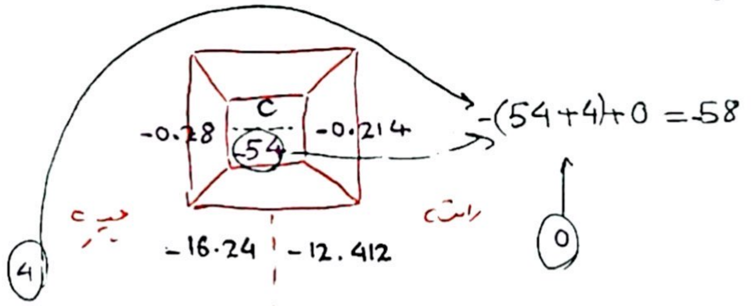
اکنون این عدد 58 باید باید در دو ضریب جداگانه ضرب شود:

$$(-58) \times (-0.28) = +16.24$$

$$(-58) \times (-0.214) = +12.412$$

که در ضریب سمت راست C ضرب شد پس باید در سمت راست C بنویسیم.

که در ضریب سمت چپ C ضرب شد پس باید در زیر C سمت چپ نوشته شود.



$$-58 \times (-0.28) = +16.24$$

$$-58 \times (-0.214) = +12.412$$

لازم به ذکر است در تکیه‌گاه گیردار A چون تکیه‌گاه A همه‌ی لنگر را تحمل می‌کند پس ضریب‌های عضو AB در محل اتصال به A ، صفر است و در محاسبات نمی‌آید.

از طرفی تکیه‌گاه D مفصلی است .

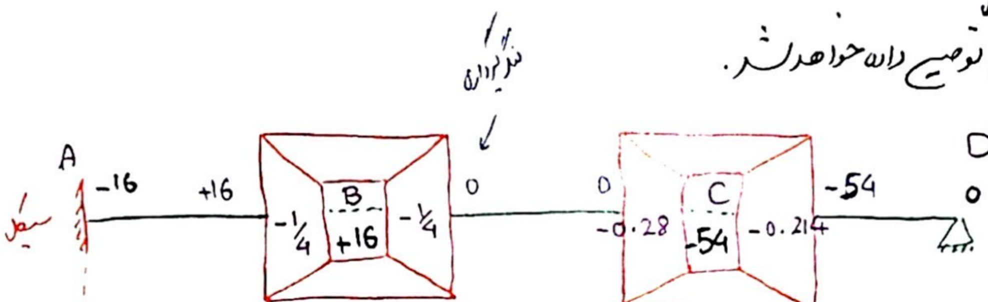
حال دوباره به سراغ گره‌ی B می‌رویم. لنگر متعادل کننده در گره B را با دو طرف B یعنی سمت چپ C و سمت راست A جمع می‌کنیم و دوباره پس از اعمال ضرایب زیر B می‌نویسیم. و همین روند را ادامه می‌دهیم.

ادامه‌ی این روند به اعداد بسیار نزدیک به هم در هر ستون می‌انجامد.

در پایان لنگر انتهایی برابر است با:

لنگر انتهایی = لنگر گیرداری همان انتها + دو برابر دوران همان انتها + جزء دوران انتهای دور

در جدول مفصل توضیح داده خواهد شد.



	A	B	B	C	C
1	0	-4	-4	+16.24	+12.412
2	0	-8.06	-8.06	+17.37	+13.28
3	0	-8.34	-8.34	+17.45	+13.34
4	0	-8.36	-8.36	+17.46	+13.35
5	0	-8.365	-8.365	+17.462*	+13.346
	-16 + (-8.36) = -24.36	-0.73	+0.73	27.3	-27.308

اعداد این دو ردیف بسیار به هم نزدیکند پس تا همین مرحله 5 کافی است و از فرمول بالا لنگرهای انتهایی بدست می‌آید.

دوران انتها

0 برای دوران انتهای دور

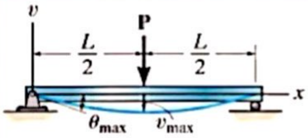
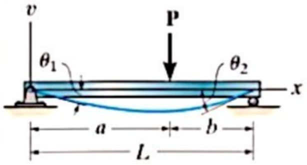
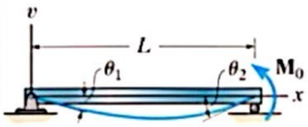
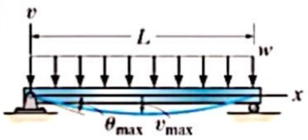
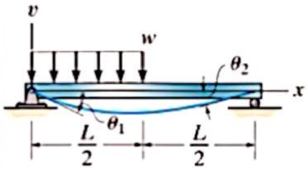
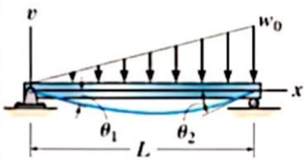
لنگر گیرداری همان انتها = 0
+
۲ (دوران همان انتها) = 2×(8.365)
+
جزء دوران انتهای دور* = 17.462

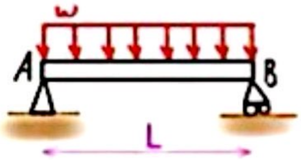
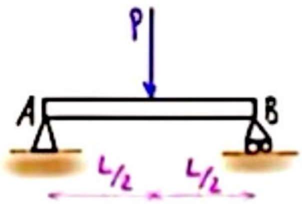
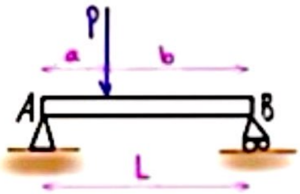
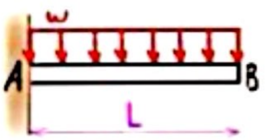
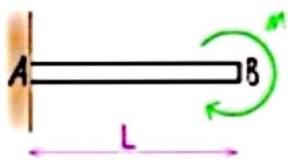
لنگر گیرداری همان انتها = -54
+
۲× (دوران همان انتها) = +26.692
+
جزء دوران انتهای دور ← 0
=
27.308

APPENDIX C

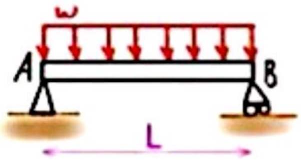
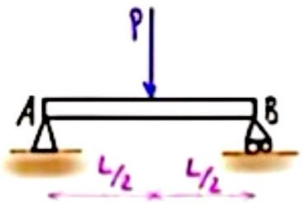
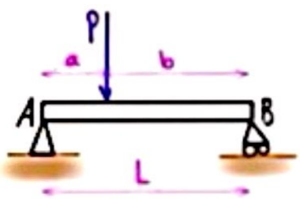
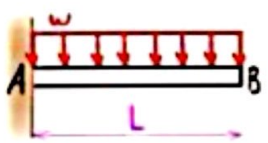
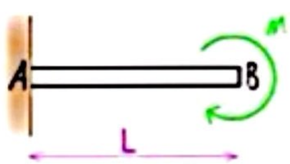
SLOPES AND DEFLECTIONS OF BEAMS

Simply Supported Beam Slopes and Deflections

Beam	Slope	Deflection	Elastic Curve
	$\theta_{max} = \dfrac{-PL^2}{16EI}$	$v_{max} = \dfrac{-PL^3}{48EI}$	$v = \dfrac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $0 \le x \le L/2$
	$\theta_1 = \dfrac{-Pab(L+b)}{6EIL}$ $\theta_2 = \dfrac{Pab(L+a)}{6EIL}$	$v\Big\rvert_{x=a} = \dfrac{-Pba}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$	$v = \dfrac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \le x \le a$
	$\theta_1 = \dfrac{-M_0 L}{6EI}$ $\theta_2 = \dfrac{M_0 L}{3EI}$	$v_{max} = \dfrac{-M_0 L^2}{9\sqrt{3}\,EI}$ at $x = 0.5774L$	$v = \dfrac{-M_0 x}{6EIL}(L^2 - x^2)$
	$\theta_{max} = \dfrac{-wL^3}{24EI}$	$v_{max} = \dfrac{-5wL^4}{384EI}$	$v = \dfrac{-wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_1 = \dfrac{-3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \dfrac{7wL^3}{384EI}$	$v\Big\rvert_{x=L/2} = \dfrac{-5wL^4}{768EI}$ $v_{max} = -0.006563\dfrac{wL^4}{EI}$ at $x = 0.4598L$	$v = \dfrac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \le x < L$
	$\theta_1 = \dfrac{-7w_0L^3}{360EI}$ $\theta_2 = \dfrac{w_0L^3}{45EI}$	$v_{max} = -0.00652\dfrac{w_0L^4}{EI}$ at $x = 0.5193L$	$v = \dfrac{-w_0x}{360EIL}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$

Positive Convention 	Slope at A	Slope at B	Elastic Curve Equation
	$\theta_A = \frac{-wL^3}{24EI}$	$\theta_B = \frac{wL^3}{24EI}$	$y = \frac{-w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$ for $0 \le x \le L$ $y = -\frac{5wL^4}{384EI}$ for $x = \frac{L}{2}$
	$\theta_A = \frac{-PL^2}{16EI}$	$\theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$	$y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$ for $x \le L/2$ $y = \frac{-PL^3}{48EI}$ for $x = \frac{L}{2}$
	$\theta_A = \frac{-Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$	$\theta_B = \frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$	$y = \frac{Pb}{6EIL}(x^3 - L^2x + b^2x)$ for $x < a$ $y = \frac{-Pa^2b^2}{3EIL}$ for $x = a$
	$\theta_A = 0$	$\theta_B = \frac{-wL^3}{6EI}$	$y = \frac{-w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$ for $0 \le x \le L$ $y = \frac{-wL^4}{8EI}$ for $x = L$
	$\theta_A = 0$	$\theta_B = \frac{-PL^2}{2EI}$	$y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$ for $0 \le x \le L$ $y = \frac{-PL^3}{3EI}$ for $x = L$
	$\theta_A = 0$	$\theta_B = \frac{-ML}{EI}$	$y = \frac{-M}{2EI}(x^2)$ for $0 \le x \le L$ $y = \frac{-ML^2}{2EI}$ for $x = L$

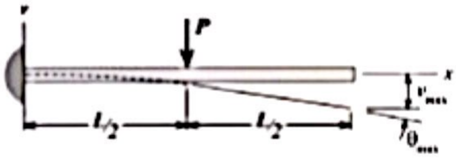
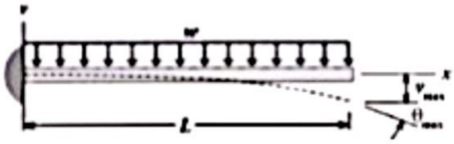
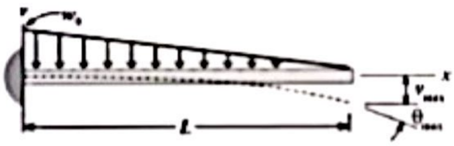
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

Positive Convention 	Slope at A	Slope at B	Elastic Curve Equation
	$\theta_A = \frac{-wL^3}{24EI}$	$\theta_B = \frac{wL^3}{24EI}$	$y = \frac{-w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$ for $0 \le x \le L$ $y = -\frac{5wL^4}{384EI}$ for $x = \frac{L}{2}$
	$\theta_A = \frac{-PL^2}{16EI}$	$\theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$	$y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$ for $x \le L/2$ $y = \frac{-PL^3}{48EI}$ for $x = \frac{L}{2}$
	$\theta_A = \frac{-Pb(L^2-b^2)}{6EIL}$	$\theta_B = \frac{Pa(L^2-a^2)}{6EIL}$	$y = \frac{Pb}{6EIL}(x^3 - L^2x + b^2x)$ for $x < a$ $y = \frac{-Pa^2b^2}{3EIL}$ for $x = a$
	$\theta_A = 0$	$\theta_B = \frac{-wL^3}{6EI}$	$y = \frac{-w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$ for $0 \le x \le L$ $y = \frac{-wL^4}{8EI}$ for $x = L$
	$\theta_A = 0$	$\theta_B = \frac{-PL^2}{2EI}$	$y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$ for $0 \le x \le L$ $y = \frac{-PL^3}{3EI}$ for $x = L$
	$\theta_A = 0$	$\theta_B = \frac{-ML}{EI}$	$y = \frac{-M}{2EI}(x^2)$ for $0 \le x \le L$ $y = \frac{-ML^2}{2EI}$ for $x = L$

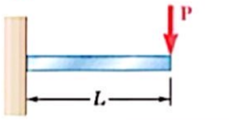
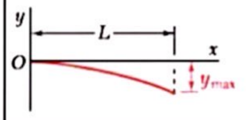
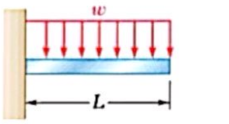
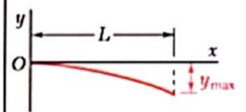
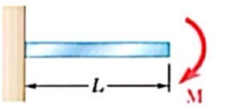
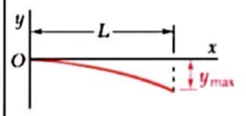
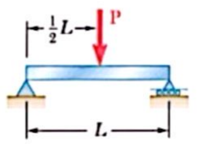
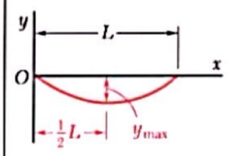
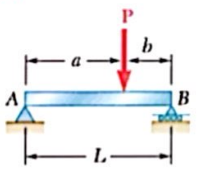
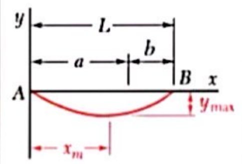
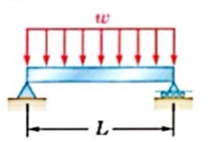
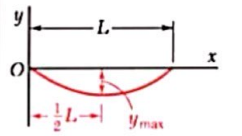
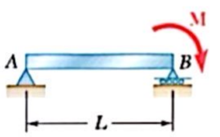
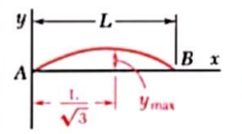
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

CANTILEVER BEAMS

Beam	Slope	Deflection	Elastic Curve
	19 $\theta_{max} = -\dfrac{PL^2}{2EI}$	20 $v_{max} = -\dfrac{PL^3}{3EI}$	21 $v = -\dfrac{Px^2}{6EI}(3L - x)$
	22 $\theta_{max} = -\dfrac{PL^2}{8EI}$	23 $v_{max} = -\dfrac{5PL^3}{48EI}$	24 $v = -\dfrac{Px^2}{12EI}(3L - 2x)$ for $0 \le x \le L/2$ $v = -\dfrac{PL^2}{48EI}(6x - L)$ for $L/2 \le x \le L$
	25 $\theta_{max} = -\dfrac{ML}{EI}$	26 $v_{max} = -\dfrac{ML^2}{2EI}$	27 $v = -\dfrac{Mx^2}{2EI}$
	28 $\theta_{max} = -\dfrac{wL^3}{6EI}$	29 $v_{max} = -\dfrac{wL^4}{8EI}$	30 $v = -\dfrac{wx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2)$
	31 $\theta_{max} = -\dfrac{w_0L^3}{24EI}$	32 $v_{max} = -\dfrac{w_0L^4}{30EI}$	33 $v = -\dfrac{w_0x^2}{120LEI}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$

Appendix D Beam Deflections and Slopes

Beam and Loading	Elastic Curve	Maximum Deflection	Slope at End	Equation of Elastic Curve
1 		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
2 		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$	$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
3 		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$	$y = -\frac{M}{2EI}x^2$
4 		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$\pm\frac{PL^2}{16EI}$	For $x \le \frac{1}{2}L$: $y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$
5 		For $a > b$: $-\frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ at $x_m = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$	$\theta_A = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$ $\theta_B = +\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$	For $x < a$: $y = \frac{Pb}{6EIL}[x^3 - (L^2 - b^2)x]$ For $x = a$: $y = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$
6 		$-\frac{5wL^4}{384EI}$	$\pm\frac{wL^3}{24EI}$	$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$
7 		$\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A = +\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ML}{3EI}$	$y = -\frac{M}{6EIL}(x^3 - L^2x)$

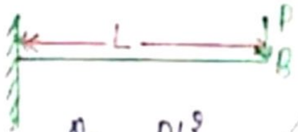
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Slope & Deflection

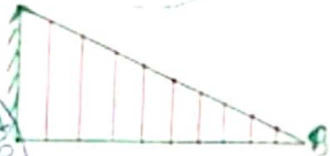
$\theta_A = 0 \quad \theta_B = \frac{M \cdot L}{EI}$

$\Delta A = 0 \quad \Delta B = \frac{ML^2}{2EI}$

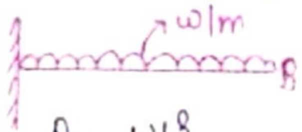


$\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$

$\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$



$\theta_B = \frac{WL^3}{24EI} \quad \Delta_B = \frac{WL^4}{30EI}$



$\theta_B = \frac{WL^3}{6EI}$

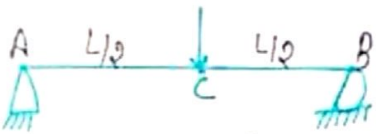
$\Delta_B = \frac{WL^4}{8EI}$

$\theta_A = \theta_B = \frac{ML}{2EI}$

$\Delta max @ \frac{L}{2} = \frac{ML^2}{8EI}$

$\theta_A = \theta_B = \frac{ML}{24EI}$

$\theta_C = \frac{ML}{12EI}$

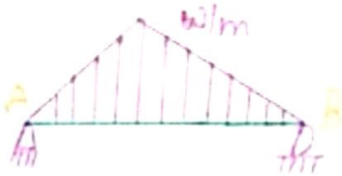


$\theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$

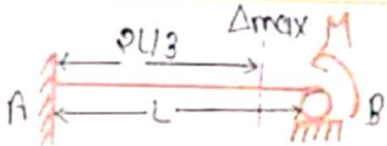
$\Delta_C = \frac{PL^3}{48EI}$

$\theta_A = \theta_B = \frac{WL^3}{24EI}$

$\Delta_C = \left\{\frac{5}{384} \times \frac{WL^4}{EI}\right\}$

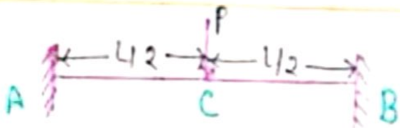


$\theta_A = \theta_B = \frac{5}{192} \frac{wl^3}{EI}$



$\theta_B = \frac{ML}{4EI}$

$\Delta max @ \frac{2L}{3}$ from A, $\frac{ML^2}{27EI}$

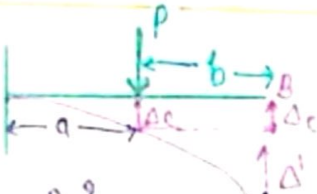


$\theta_A = \theta_B = \theta_C = 0$

$\Delta_C = \frac{PL^3}{192EI}$

$\theta_A = \theta_B = \theta_C = 0$

$\Delta c @ \frac{L}{2}, \ \frac{WL^4}{384EI}$



$\theta_C = \frac{Pa^2}{2EI}, \ \Delta_C = \frac{Pa^3}{3EI}$

$\Delta_B = \Delta_C + \Delta' \quad \Delta' = b \cdot \frac{Pa^2}{2EI}$

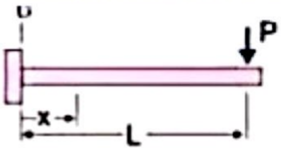
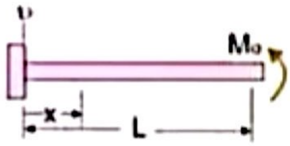
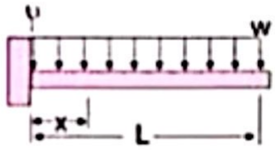
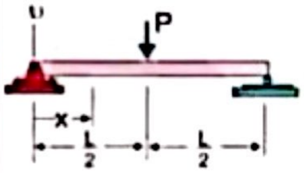
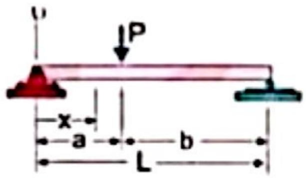
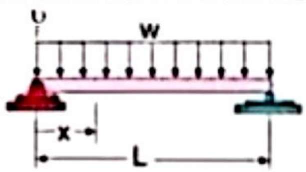
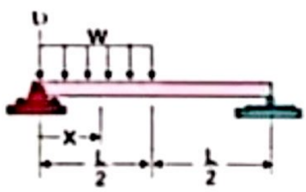
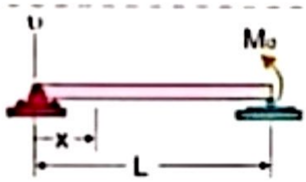
$\Delta_B = \frac{Pa^3}{\ } + b \cdot \frac{Pa^2}{\ }$

$\theta_B = \frac{ML}{3EI}$

$\theta_A = \frac{ML}{6EI}, = \theta_B/2$

$\Delta max @ \frac{L}{\ }$ from A,

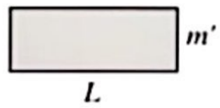
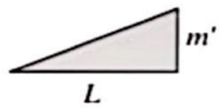
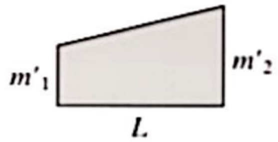
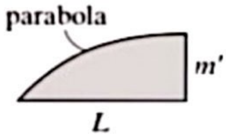
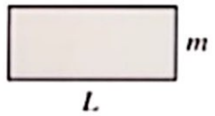
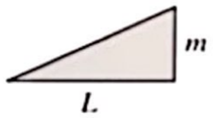
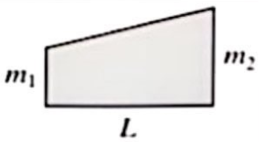
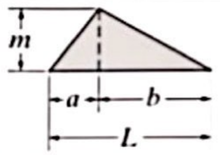
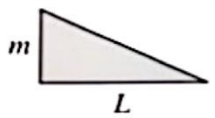
$\Delta max = \frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$

Condition	Loading	υ +↑	θ +↺	Equation +↑ +↺
Cantilever Beam with point loading at free end		$\upsilon_{max} = -\frac{PL^3}{3EI}$ at $x = L$	$\theta_{max} = -\frac{PL^2}{2EI}$ at $x = L$	$\upsilon = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
Cantilever beam with moment at free end		$\upsilon_{max} = \frac{M_oL^2}{2EI}$ at $x = L$	$\theta = \frac{M_oL^2}{EI}$ at $x = L$	$\upsilon = \frac{M_o}{2EI}x^2$
Cantilever beam with uniform distributed load over full span		$\upsilon_{max} = -\frac{wL^4}{8EI}$ at $x = L$	$\theta_{max} = -\frac{wL^3}{6EI}$ at $x = L$	$\upsilon = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
Simply supported Beam with force at mid span		$\upsilon_{max} = -\frac{PL^3}{48EI}$ at $x = L/2$	$\theta_{max} = \pm\frac{PL^2}{16EI}$ at $x = 0$ or $x = L$	$\upsilon = \frac{P}{48EI}(4x^4 - 3L^2x),\ 0 \le x \le L/2$
Simply supported Beam with force at a point other than mid span			$\theta_L = -\frac{Pab(L+b)}{6LEI}$ $\theta = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$	$\upsilon = -\frac{P}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \le x \le a$
Simply supported Beam with uniformly distributed load over full span		$\upsilon_{max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$ at $x = \frac{L}{2}$	$\theta_{max} = \pm\frac{wL^3}{24EI}$	$\upsilon = -\frac{wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
Simply supported Beam with uniformly distributed load over Half span			$\theta_L = -\frac{3wL^3}{128EI}$ $\theta = \frac{7wL^3}{384EI}$	$\upsilon = -\frac{wx}{384EI}(9L^3 - 24Lx^2 + 16x^3)$ $0 \le x \le L/2$ $\upsilon = -\frac{wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \le x \le L$
Simply supported Beam with moment at one support		$\upsilon_{max} = -\frac{M_oL^2}{9\sqrt{3}EL}$	$\upsilon_L = -\frac{M_oL}{6EL}$ $\upsilon = \frac{M_oL}{3EL}$	$\upsilon = -\frac{M_ox}{6EIL}(x^2 - 3Lx + 2L^2)$

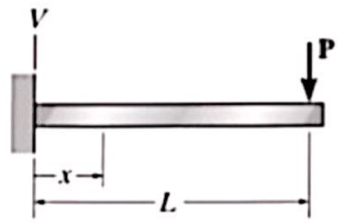
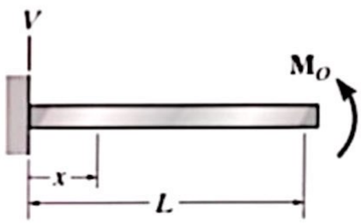
Legends

- υ - Vertical deflection
- W - Uniform distributed load
- L - Length of Beam
- θ - Slope
- P - Point load
- E - Modulus of elasticity
- θ_L - Slope at right support
- Mo - Moment at point
- θ_{max} - Maximum slope
- υ_{max} - maximum vertical deflection

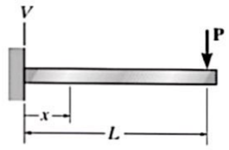
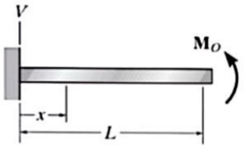
J 0

$\int_0^L mm'\,dx$				
	$mm'L$	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{2}m(m'_1 + m'_2)L$	$\frac{2}{3}mm'L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{3}mm'L$	$\frac{1}{6}m(m'_1 + 2m'_2)L$	$\frac{5}{12}mm'L$
	$\frac{1}{2}m'(m_1 + m_2)L$	$\frac{1}{6}m'(m_1 + 2m_2)L$	$\frac{1}{6}\left[m'_1(2m_1 + m_2) + m'_2(m_1 + 2m_2)\right]L$	$\frac{1}{12}\left[m'(3m_1 + 5m_2)\right]L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'(L + a)$	$\frac{1}{6}m\left[m'_1(L + b) + m'_2(L + a)\right]$	$\frac{1}{12}mm'\left(3 + \frac{3a}{L} - \frac{a^2}{L^2}\right)L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'L$	$\frac{1}{6}m(2m'_1 + m'_2)L$	$\frac{1}{4}mm'L$

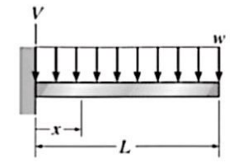
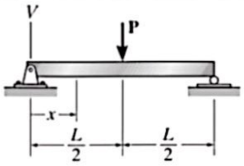
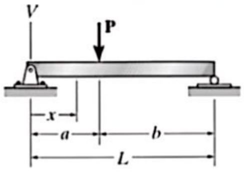
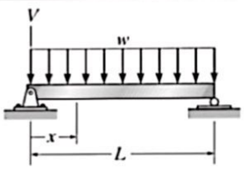
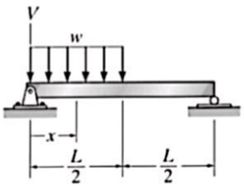
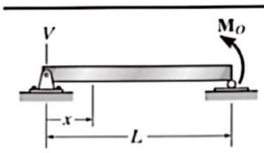
Beam Deflections and Slopes

Loading	$V + \uparrow$	$\theta + \circlearrowleft$	Equation $+\uparrow$ $+\circlearrowleft$
	$V_{max} = -\frac{PL^3}{3EI}$ at $x = L$	$\theta_{max} = -\frac{PL^2}{2EI}$ at $x = L$	$V = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
	$V_{max} = \frac{M_O L^2}{2EI}$ at $x = L$	$\theta_{max} = \frac{M_O L}{EI}$ at $x = L$	$V = \frac{M_O}{2EI}x^2$

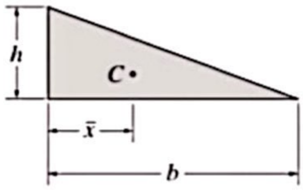
Beam Deflections and Slopes

Loading	$V+\uparrow$	$\theta+\circlearrowleft$	Equation $+\uparrow\ +\circlearrowleft$
	$V_{max} = -\dfrac{PL^3}{3EI}$ at $x = L$	$\theta_{max} = -\dfrac{PL^2}{2EI}$ at $x = L$	$V = \dfrac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
	$V_{max} = \dfrac{M_O L^2}{2EI}$ at $x = L$	$\theta_{max} = \dfrac{M_O L}{EI}$ at $x = L$	$V = \dfrac{M_O}{2EI}x^2$

Beam Deflections and Slopes (continued)

	$V_{max} = -\dfrac{wL^4}{8EI}$ at $x = L$	$\theta_{max} = -\dfrac{wL^3}{6EI}$ at $x = L$	$V = -\dfrac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
	$V_{max} = -\dfrac{PL^3}{48EI}$ at $x = L/2$	$\theta_{max} = \pm\dfrac{PL^2}{16EI}$ at $x = 0$ or $x = L$	$V = \dfrac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$, $0 \le x \le L/2$
		$\theta_L = -\dfrac{Pab(L+b)}{6LEI}$ $\theta_R = \dfrac{Pab(L+a)}{6LEI}$	$V = -\dfrac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2)$, $0 \le x \le a$
	$V_{max} = -\dfrac{5wL^4}{384EI}$ at $x = \dfrac{L}{2}$	$\theta_{max} = \pm\dfrac{wL^3}{24EI}$	$V = -\dfrac{wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
		$\theta_L = -\dfrac{3wL^3}{128EI}$ $\theta_R = \dfrac{7wL^3}{384EI}$	$V = -\dfrac{wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$, $0 \le x \le L/2$ $V = -\dfrac{wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$, $L/2 \le x \le L$
	$V_{max} = -\dfrac{M_O L^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_L = -\dfrac{M_O L}{6EI}$ $\theta_R = \dfrac{M_O L}{3EI}$	$V = -\dfrac{M_O x}{6EIL}(L^2 - x^2)$

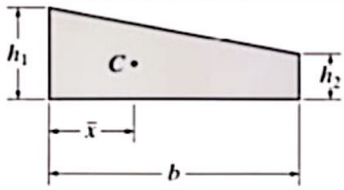
Geometric Properties of Areas



Triangle

$$A = \frac{1}{2} bh$$

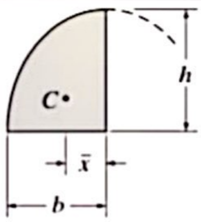
$$\bar{x} = \frac{1}{3} b$$



Trapezoid

$$A = \frac{1}{2} b(h_1 + h_2)$$

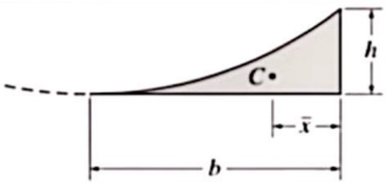
$$\bar{x} = \frac{b(2h_2 + h_1)}{3(h_1 + h_2)}$$



Semi Parabola

$$A = \frac{2}{3} bh$$

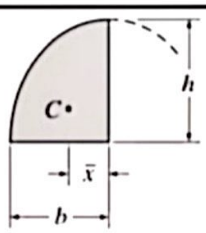
$$\bar{x} = \frac{3}{8} b$$



Parabolic spandrel

$$A = \frac{1}{3} bh$$

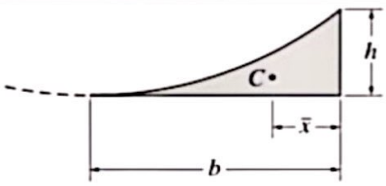
$$\bar{x} = \frac{1}{4} b$$



Semi-segment of *n*th degree curve

$$A = bh\left(\frac{n}{n + 1}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{b(n + 1)}{2(n + 2)}$$



Spandrel of *n*th degree curve

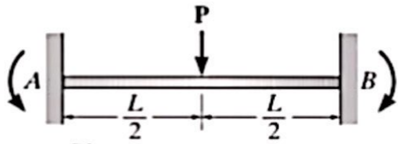
$$A = bh\left(\frac{1}{n + 1}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{b}{n + 2}$$

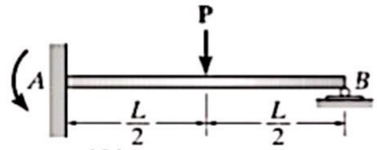
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

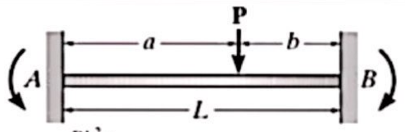
Fixed End Moments



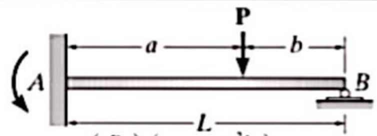
$(FEM)_{AB} = \frac{PL}{8}$ $\quad$ $(FEM)_{BA} = \frac{PL}{8}$



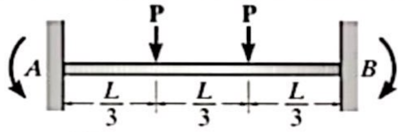
$(FEM)'_{AB} = \frac{3PL}{16}$



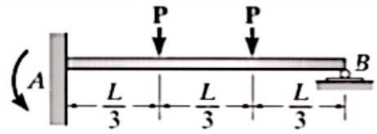
$(FEM)_{AB} = \frac{Pb^2a}{L^2}$ $\quad$ $(FEM)_{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2}$



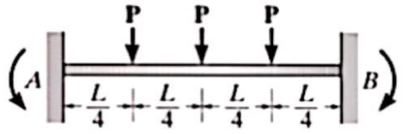
$(FEM)'_{AB} = \left(\frac{P}{L^2}\right)\left(b^2a + \frac{a^2b}{2}\right)$



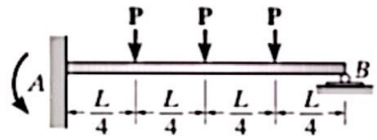
$(FEM)_{AB} = \frac{2PL}{9}$ $\quad$ $(FEM)_{BA} = \frac{2PL}{9}$



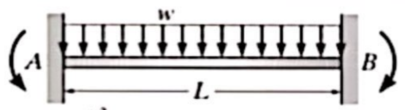
$(FEM)'_{AB} = \frac{PL}{3}$



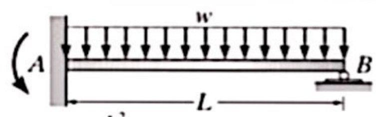
$(FEM)_{AB} = \frac{5PL}{16}$ $\quad$ $(FEM)_{BA} = \frac{5PL}{16}$



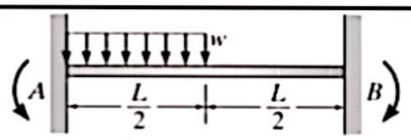
$(FEM)'_{AB} = \frac{15PL}{32}$



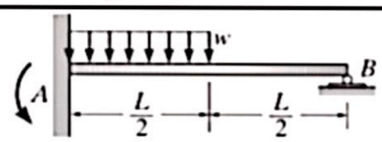
$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{12}$ $\quad$ $(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12}$



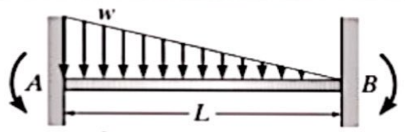
$(FEM)'_{AB} = \frac{wL^2}{8}$



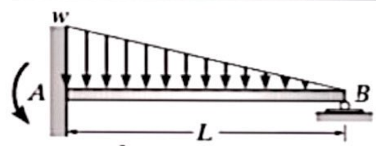
$(FEM)_{AB} = \frac{11wL^2}{192}$ $\quad$ $(FEM)_{BA} = \frac{5wL^2}{192}$



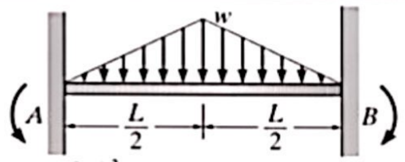
$(FEM)'_{AB} = \frac{9wL^2}{128}$



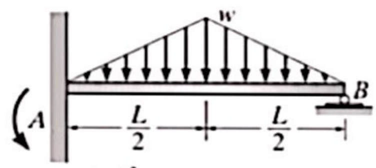
$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{20}$ $\quad$ $(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{30}$



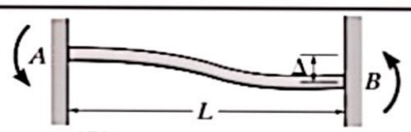
$(FEM)'_{AB} = \frac{wL^2}{15}$



$(FEM)_{AB} = \frac{5wL^2}{96}$ $\quad$ $(FEM)_{BA} = \frac{5wL^2}{96}$



$(FEM)'_{AB} = \frac{5wL^2}{64}$



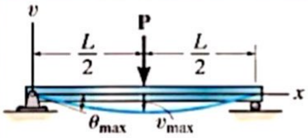
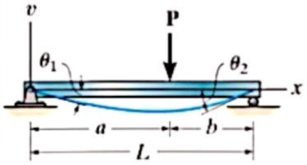
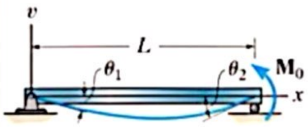
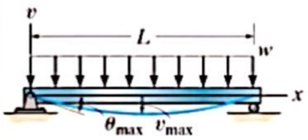
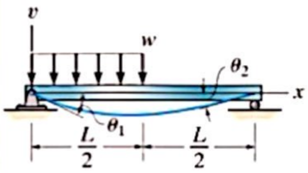
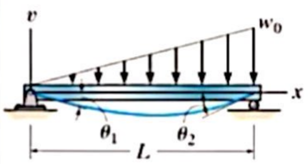
$(FEM)_{AB} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$ $\quad$ $(FEM)_{BA} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$

$(FEM)'_{AB} = \frac{3EI\Delta}{L^2}$

APPENDIX C

SLOPES AND DEFLECTIONS OF BEAMS

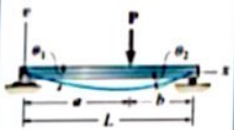
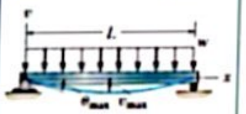
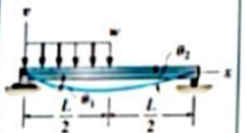
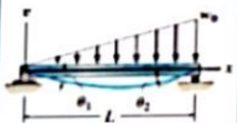
Simply Supported Beam Slopes and Deflections

Beam	Slope	Deflection	Elastic Curve
	$\theta_{max} = \dfrac{-PL^2}{16EI}$	$v_{max} = \dfrac{-PL^3}{48EI}$	$v = \dfrac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $0 \le x \le L/2$
	$\theta_1 = \dfrac{-Pab(L+b)}{6EIL}$ $\theta_2 = \dfrac{Pab(L+a)}{6EIL}$	$v\Big\vert_{x=a} = \dfrac{-Pba}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$	$v = \dfrac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \le x \le a$
	$\theta_1 = \dfrac{-M_0L}{6EI}$ $\theta_2 = \dfrac{M_0L}{3EI}$	$v_{max} = \dfrac{-M_0L^2}{9\sqrt{3}\,EI}$ at $x = 0.5774L$	$v = \dfrac{-M_0x}{6EIL}(L^2 - x^2)$
	$\theta_{max} = \dfrac{-wL^3}{24EI}$	$v_{max} = \dfrac{-5wL^4}{384EI}$	$v = \dfrac{-wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_1 = \dfrac{-3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \dfrac{7wL^3}{384EI}$	$v\Big\vert_{x=L/2} = \dfrac{-5wL^4}{768EI}$ $v_{max} = -0.006563\dfrac{wL^4}{EI}$ at $x = 0.4598L$	$v = \dfrac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \le x < L$
	$\theta_1 = \dfrac{-7w_0L^3}{360EI}$ $\theta_2 = \dfrac{w_0L^3}{45EI}$	$v_{max} = -0.00652\dfrac{w_0L^4}{EI}$ at $x = 0.5193L$	$v = \dfrac{-w_0x}{360EIL}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$

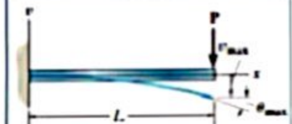
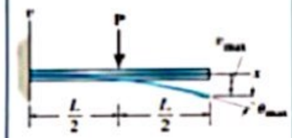
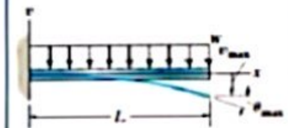
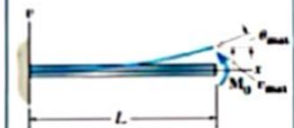
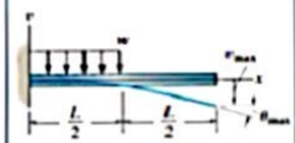
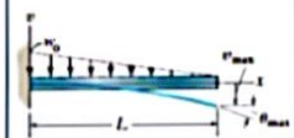
APPENDIX D

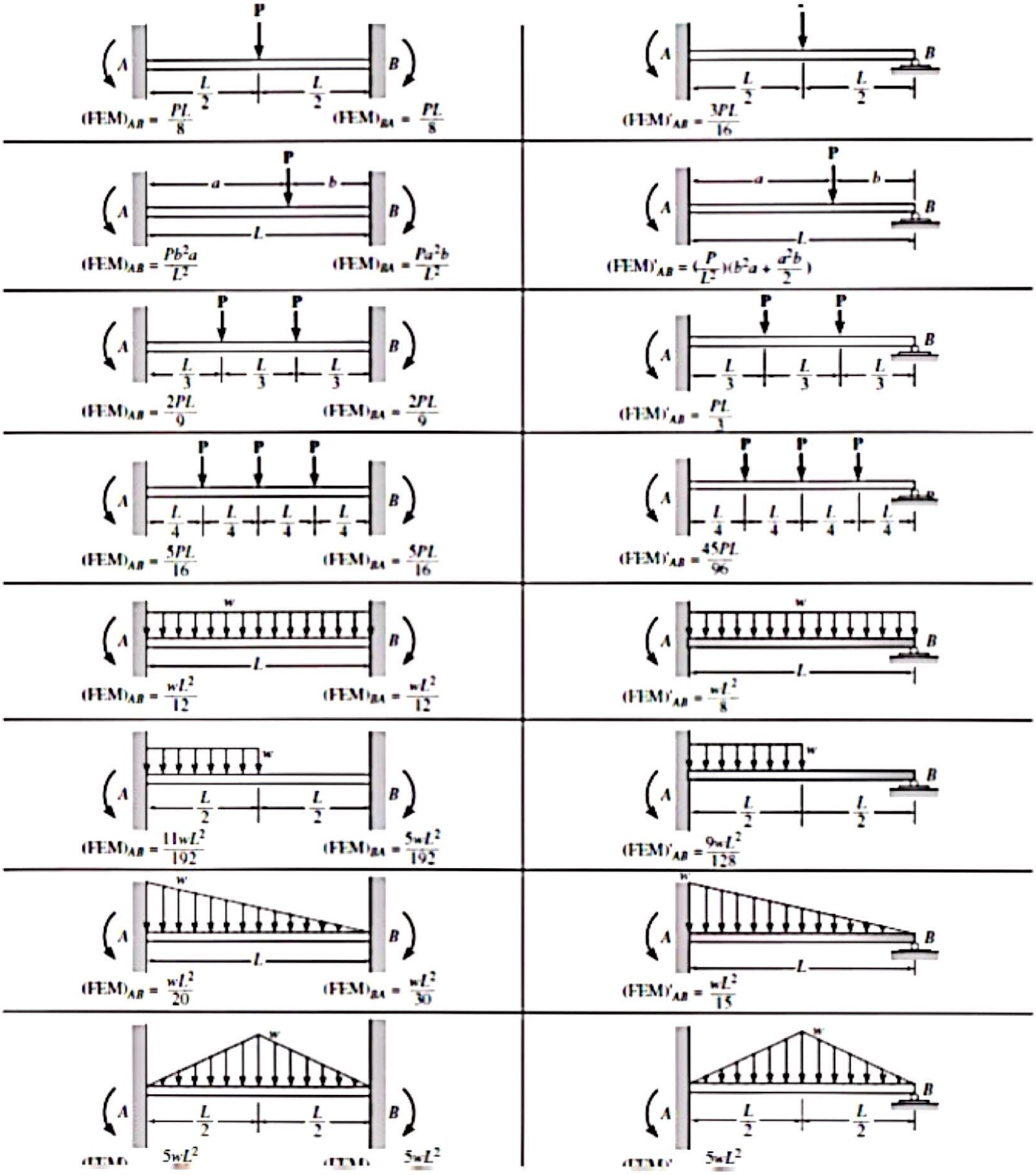
SLOPES AND DEFLECTIONS OF BEAMS

Simply Supported Beam Slopes and Deflections

Beam	Slope	Deflection	Elastic Curve
	$\theta_{max} = \dfrac{-PL^2}{16EI}$	$v_{max} = \dfrac{-PL^3}{48EI}$	$v = \dfrac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $0 \le x \le L/2$
	$\theta_1 = \dfrac{-Pab(L + b)}{6EIL}$ $\theta_2 = \dfrac{Pab(L + a)}{6EIL}$	$v\Big\vert_{x=a} = \dfrac{-Pba}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$	$v = \dfrac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \le x \le a$
	$\theta_1 = \dfrac{-M_0 L}{6EI}$ $\theta_2 = \dfrac{M_0 L}{3EI}$	$v_{max} = \dfrac{-M_0 L^2}{9\sqrt{3}EI}$ at $x = 0.5774L$	$v = \dfrac{-M_0 x}{6EIL}(L^2 - x^2)$
	$\theta_{max} = \dfrac{-wL^3}{24EI}$	$v_{max} = \dfrac{-5wL^4}{384EI}$	$v = \dfrac{-wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_1 = \dfrac{-3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \dfrac{7wL^3}{384EI}$	$v\Big\vert_{x=L/2} = \dfrac{-5wL^4}{768EI}$ $v_{max} = -0.006563\dfrac{wL^4}{EI}$ at $x = 0.4598L$	$v = \dfrac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2$ $+ 17L^2x - L^3)$ $L/2 \le x < L$
	$\theta_1 = \dfrac{-7w_0L^3}{360EI}$ $\theta_2 = \dfrac{w_0L^3}{45EI}$	$v_{max} = -0.00652\dfrac{w_0L^4}{EI}$ at $x = 0.5193L$	$v = \dfrac{-w_0x}{360EIL}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$

Cantilevered Beam Slopes and Deflections

Beam	Slope	Deflection	Elastic Curve
	$\theta_{max} = \dfrac{-PL^2}{2EI}$	$v_{max} = \dfrac{-PL^3}{3EI}$	$v = \dfrac{-Px^2}{6EI}(3L - x)$
	$\theta_{max} = \dfrac{-PL^2}{8EI}$	$v_{max} = \dfrac{-5PL^3}{48EI}$	$v = \dfrac{-Px^2}{12EI}(3L - 2x)$ $\quad 0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-PL^2}{48EI}(6x - L)$ $\quad L/2 \le x \le L$
	$\theta_{max} = \dfrac{-wL^3}{6EI}$	$v_{max} = \dfrac{-wL^4}{8EI}$	$v = \dfrac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$\theta_{max} = \dfrac{M_0L}{EI}$	$v_{max} = \dfrac{M_0L^2}{2EI}$	$v = \dfrac{M_0x^2}{2EI}$
	$\theta_{max} = \dfrac{-wL^3}{48EI}$	$v_{max} = \dfrac{-7wL^4}{384EI}$	$v = \dfrac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 2Lx + \frac{3}{2}L^2)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-wL^3}{384EI}(8x - L)$ $L/2 \le x \le L$
	$\theta_{max} = \dfrac{-w_0L^3}{24EI}$	$v_{max} = \dfrac{-w_0L^4}{30EI}$	$v = \dfrac{-w_0x^2}{120EIL}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$



P
A
B
$\frac{L}{2}$
$\frac{L}{2}$
$(FEM)_{AB} = \frac{PL}{8}$
$(FEM)_{BA} = \frac{PL}{8}$
$(FEM)'_{AB} = \frac{3PL}{16}$
a
b
L
$(FEM)_{AB} = \frac{Pb^2a}{L^2}$
$(FEM)_{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2}$
$(FEM)'_{AB} = (\frac{P}{L^2})(b^2a + \frac{a^2b}{2})$
$\frac{L}{3}$
$(FEM)_{AB} = \frac{2PL}{9}$
$(FEM)_{BA} = \frac{2PL}{9}$
$(FEM)'_{AB} = \frac{PL}{3}$
$\frac{L}{4}$
$(FEM)_{AB} = \frac{5PL}{16}$
$(FEM)_{BA} = \frac{5PL}{16}$
$(FEM)'_{AB} = \frac{45PL}{96}$
w
$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{12}$
$(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12}$
$(FEM)'_{AB} = \frac{wL^2}{8}$
$(FEM)_{AB} = \frac{11wL^2}{192}$
$(FEM)_{BA} = \frac{5wL^2}{192}$
$(FEM)'_{AB} = \frac{9wL^2}{128}$
$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{20}$
$(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{30}$
$(FEM)'_{AB} = \frac{wL^2}{15}$
$5wL^2$
$5wL^2$
$5wL^2$